Đề tài: Một kết quả về bất đẳng thức xoay vòng

——— Người thực hiện: Nguyễn Văn Cương ———

Cán bộ hướng dẫn: TS. Nguyễn Vũ Lương
Cán bộ phản biện: TS. Nguyễn Thành Văn

Sư phạm Toán 48 - Khoa Sư Phạm - ĐH Quốc Gia Hà Nội

Ngày 20 tháng 05 năm 2007

Lý do chọn đề tài

- Yêu thích bất đẳng thức.

Lý do chọn đề tài

- Yêu thích bất đẳng thức.
- Bất đẳng thức xoay vòng là một trong những nội dung hay và khó đòi hỏi sự tìm tòi sáng tạo.

Lý do chọn đề tài

- Yêu thích bất đẳng thức.
- Bất đẳng thức xoay vòng là một trong những nội dung hay và khó đòi hỏi sự tìm tòi sáng tạo.
- Việc xây dựng, chứng minh một bài toán bất đẳng thức phân thức đòi hỏi nhiều kỹ năng của người làm toán.

Mục đích đề tài

- Xây dựng và tổng quát một dạng bài bất đẳng thức xoay vòng phân thức.

Mục đích đề tài

- Xây dựng và tổng quát một dạng bài bất đẳng thức xoay vòng phân thức.
- Đưa ra được một phương pháp phân tích $\Rightarrow$ xây dựng các bài toán bất đẳng thức phân thức khác.

Mục đích đề tài

- Xây dựng và tổng quát một dạng bài bất đẳng thức xoay vòng phân thức.
- Đưa ra được một phương pháp phân tích $\Rightarrow$ xây dựng các bài toán bất đẳng thức phân thức khác.
- Dùng để xây dựng các bài toán cho học sinh khá, giỏi ... dùng cho các đề thi học sinh giỏi.

Tổng quan bất đẳng thức xoay vòng

- Bất đẳng thức Schurs.

Tổng quan bất đẳng thức xoay vòng

- Bất đẳng thức Schurs.
- Bất đẳng thức xoay vòng khác trong tam giác.

Tổng quan bất đẳng thức xoay vòng

- Bất đẳng thức Schurs.
- Bất đẳng thức xoay vòng khác trong tam giác.
- Sử dụng bất đẳng thức Cauchy chứng minh một số dạng bất đẳng thức xoay vòng.

Tổng quan bất đẳng thức xoay vòng

- Bất đẳng thức Schurs.
- Bất đẳng thức xoay vòng khác trong tam giác.
- Sử dụng bất đẳng thức Cauchy chứng minh một số dạng bất đẳng thức xoay vòng.
- Bất đẳng thức xoay vòng phân thức.

Bài toán tổng quát

Cho n số không âm $a_i\,(i = \overline{1, n})$ $(n \geq 3)$; số thực $\alpha > 2$ và $r_{ij}\,(i, j = \overline{1, n})$ thỏa mãn $r_{ij} + r_{ji} = \alpha$ thì

$$P = \frac{a_1}{a_1 + \alpha a_2 + \sum\limits_{i=3}^{n-1} r_{1i} a_i} + \frac{a_2}{a_2 + \alpha a_3 + \sum\limits_{i=4}^{n} r_{2i} a_i} + \cdots +$$

$$+ \frac{a_n}{a_n + \alpha a_1 + \sum\limits_{i=2}^{n-2} r_n a_i} \geq \frac{2n}{2 + (n-1)\alpha}$$

Biểu thức tương đương của P

- $$P = \frac{a_1^2}{a_1^2 + \alpha a_1 a_2 + \sum_{i=3}^{n-1} r_{1i} a_1 a_i} + \frac{a_2^2}{a_2^2 + \alpha a_2 a_3 + \sum_{i=4}^{n} r_{2i} a_2 a_i} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n^2 + \alpha a_n a_1 + \sum_{i=2}^{n-2} r_n a_n a_i}$$

Biểu thức tương đương của P

- $$P = \frac{a_1^2}{a_1^2 + \alpha a_1 a_2 + \sum_{i=3}^{n-1} r_{1i} a_1 a_i} + \frac{a_2^2}{a_2^2 + \alpha a_2 a_3 + \sum_{i=4}^{n} r_{2i} a_2 a_i} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n^2 + \alpha a_n a_1 + \sum_{i=2}^{n-2} r_n a_n a_i}$$
- Từ biểu thức P ta lập ma trận $n(n-2)$ sau:

Biểu thức tương đương của P

- $$P = \frac{a_1^2}{a_1^2 + \alpha a_1 a_2 + \sum_{i=3}^{n-1} r_{1i} a_1 a_i} + \frac{a_2^2}{a_2^2 + \alpha a_2 a_3 + \sum_{i=4}^{n} r_{2i} a_2 a_i} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n^2 + \alpha a_n a_1 + \sum_{i=2}^{n-2} r_n a_n a_i}$$
- Từ biểu thức P ta lập ma trận $n(n-2)$ sau:
- $$\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_{n-1} \\ a_2a_3 & a_2a_4 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_na_{n-2} \end{pmatrix}$$

Xét trường hợp chẵn $n = 2m$

- $$\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_{m+1} & \cdots & a_1a_{2m-1} \\ a_2a_3 & a_2a_4 & \cdots & a_2a_{m+2} & \cdots & a_2a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2m}a_1 & a_{2m}a_2 & \cdots & a_{2m}a_m & \cdots & a_{2m}a_{2m-2} \end{pmatrix}$$

Xét trường hợp chẵn $n = 2m$

- $$\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_{m+1} & \cdots & a_1a_{2m-1} \\ a_2a_3 & a_2a_4 & \cdots & a_2a_{m+2} & \cdots & a_2a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2m}a_1 & a_{2m}a_2 & \cdots & a_{2m}a_m & \cdots & a_{2m}a_{2m-2} \end{pmatrix}$$
- Nhận thấy rằng các phần tử:

Xét trường hợp chẵn $n = 2m$

- $$\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_{m+1} & \cdots & a_1a_{2m-1} \\ a_2a_3 & a_2a_4 & \cdots & a_2a_{m+2} & \cdots & a_2a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2m}a_1 & a_{2m}a_2 & \cdots & a_{2m}a_m & \cdots & a_{2m}a_{2m-2} \end{pmatrix}$$
- Nhận thấy rằng các phần tử:
- Cột 1 xuất hiện duy nhất 1 lần trong chính cột 1

Xét trường hợp chẵn $n = 2m$

- $$\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_{m+1} & \cdots & a_1a_{2m-1} \\ a_2a_3 & a_2a_4 & \cdots & a_2a_{m+2} & \cdots & a_2a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2m}a_1 & a_{2m}a_2 & \cdots & a_{2m}a_m & \cdots & a_{2m}a_{2m-2} \end{pmatrix}$$
- Nhận thấy rằng các phần tử:
- Cột 1 xuất hiện duy nhất 1 lần trong chính cột 1
- Cột 2 thì các phần tử xuất hiện 2 lần: một lần trong cột 2 và một lần trong cột $2m - 2$ hay là cột 2 và cột $2m - 2$ là giống nhau.
  ...

Xét trường hợp chẵn $n = 2m$

- $$\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_{m+1} & \cdots & a_1a_{2m-1} \\ a_2a_3 & a_2a_4 & \cdots & a_2a_{m+2} & \cdots & a_2a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2m}a_1 & a_{2m}a_2 & \cdots & a_{2m}a_m & \cdots & a_{2m}a_{2m-2} \end{pmatrix}$$
- Nhận thấy rằng các phần tử:
- Cột 1 xuất hiện duy nhất 1 lần trong chính cột 1
- Cột 2 thì các phần tử xuất hiện 2 lần: một lần trong cột 2 và một lần trong cột $2m - 2$ hay là cột 2 và cột $2m - 2$ là giống nhau.
  ...
- Cột i thì các phần tử xuất hiện 2 lần: một lần trong cột i và một lần trong cột $2m - i$ hay là cột i và cột $2m - i$ là giống nhau.
  ...

Xét trường hợp chẵn $n = 2m$

- $$\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_{m+1} & \cdots & a_1a_{2m-1} \\ a_2a_3 & a_2a_4 & \cdots & a_2a_{m+2} & \cdots & a_2a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2m}a_1 & a_{2m}a_2 & \cdots & a_{2m}a_m & \cdots & a_{2m}a_{2m-2} \end{pmatrix}$$
- Nhận thấy rằng các phần tử:
- Cột 1 xuất hiện duy nhất 1 lần trong chính cột 1
- Cột 2 thì các phần tử xuất hiện 2 lần: một lần trong cột 2 và một lần trong cột $2m - 2$ hay là cột 2 và cột $2m - 2$ là giống nhau.
  ...
- Cột i thì các phần tử xuất hiện 2 lần: một lần trong cột i và một lần trong cột $2m - i$ hay là cột i và cột $2m - i$ là giống nhau.
  ...
- Duy nhất cột thứ m là các phần tử trong cột xuất hiện 2 lần trong chính cột m.

Xét trường hợp lẻ $n = 2m + 1$

- $$\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_{m+1} & a_1a_{m+2} & \cdots & a_1a_{2m} \\ a_2a_3 & a_2a_4 & \cdots & a_2a_{m+1} & a_2a_{m+2} & \cdots & a_2a_{2m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2m+1}a_1 & a_{2m+1}a_2 & \cdots & a_{2m+1}a_{m+1} & a_{2m+1}a_{m+2} & \cdots & a_{2m+1}a_{2m-1} \end{pmatrix}$$

Xét trường hợp lẻ $n = 2m + 1$

- $$\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_{m+1} & a_1a_{m+2} & \cdots & a_1a_{2m} \\ a_2a_3 & a_2a_4 & \cdots & a_2a_{m+1} & a_2a_{m+2} & \cdots & a_2a_{2m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2m+1}a_1 & a_{2m+1}a_2 & \cdots & a_{2m+1}a_{m+1} & a_{2m+1}a_{m+2} & \cdots & a_{2m+1}a_{2m-1} \end{pmatrix}$$
- Nhận thấy rằng các phần tử:

Xét trường hợp lẻ $n = 2m + 1$

- $$\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_{m+1} & a_1a_{m+2} & \cdots & a_1a_{2m} \\ a_2a_3 & a_2a_4 & \cdots & a_2a_{m+1} & a_2a_{m+2} & \cdots & a_2a_{2m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2m+1}a_1 & a_{2m+1}a_2 & \cdots & a_{2m+1}a_{m+1} & a_{2m+1}a_{m+2} & \cdots & a_{2m+1}a_{2m-1} \end{pmatrix}$$
- Nhận thấy rằng các phần tử:
- Cột 1 xuất hiện duy nhất 1 lần trong chính cột 1

Xét trường hợp lẻ $n = 2m + 1$

- $$\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_{m+1} & a_1a_{m+2} & \cdots & a_1a_{2m} \\ a_2a_3 & a_2a_4 & \cdots & a_2a_{m+1} & a_2a_{m+2} & \cdots & a_2a_{2m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2m+1}a_1 & a_{2m+1}a_2 & \cdots & a_{2m+1}a_{m+1} & a_{2m+1}a_{m+2} & \cdots & a_{2m+1}a_{2m-1} \end{pmatrix}$$
- Nhận thấy rằng các phần tử:
- Cột 1 xuất hiện duy nhất 1 lần trong chính cột 1
- Cột 2 thì các phần tử xuất hiện 2 lần: một lần trong cột 2 và một lần trong cột $2m - 1$ hay là cột 2 và cột $2m - 1$ là giống nhau.
  $\cdots$

Xét trường hợp lẻ $n = 2m + 1$

- $$\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_{m+1} & a_1a_{m+2} & \cdots & a_1a_{2m} \\ a_2a_3 & a_2a_4 & \cdots & a_2a_{m+1} & a_2a_{m+2} & \cdots & a_2a_{2m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2m+1}a_1 & a_{2m+1}a_2 & \cdots & a_{2m+1}a_{m+1} & a_{2m+1}a_{m+2} & \cdots & a_{2m+1}a_{2m-1} \end{pmatrix}$$
- Nhận thấy rằng các phần tử:
- Cột 1 xuất hiện duy nhất 1 lần trong chính cột 1
- Cột 2 thì các phần tử xuất hiện 2 lần: một lần trong cột 2 và một lần trong cột $2m - 1$ hay là cột 2 và cột $2m - 1$ là giống nhau.
  ...
- Cột i thì các phần tử xuất hiện 2 lần: một lần trong cột i và một lần trong cột $2m - i + 1$ hay là cột i và cột $2m - i + 1$ là giống nhau.
  ...

Xét trường hợp lẻ $n = 2m + 1$

- $$\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_{m+1} & a_1a_{m+2} & \cdots & a_1a_{2m} \\ a_2a_3 & a_2a_4 & \cdots & a_2a_{m+1} & a_2a_{m+2} & \cdots & a_2a_{2m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2m+1}a_1 & a_{2m+1}a_2 & \cdots & a_{2m+1}a_{m+1} & a_{2m+1}a_{m+2} & \cdots & a_{2m+1}a_{2m-1} \end{pmatrix}$$
- Nhận thấy rằng các phần tử:
- Cột 1 xuất hiện duy nhất 1 lần trong chính cột 1
- Cột 2 thì các phần tử xuất hiện 2 lần: một lần trong cột 2 và một lần trong cột $2m - 1$ hay là cột 2 và cột $2m - 1$ là giống nhau.
  $\cdots$
- Cột i thì các phần tử xuất hiện 2 lần: một lần trong cột i và một lần trong cột $2m - i + 1$ hay là cột i và cột $2m - i + 1$ là giống nhau.
  $\cdots$
- Cột m thì các phần tử xuất hiện 2 lần: một lần trong cột m và một lần trong cột $m + 1$ hay là cột m và cột $m + 1$ là giống nhau.

Cách xây dựng một bài toán cụ thể.

- Việc xây dựng bài toán cần sử dụng các đánh giá sau:

Cách xây dựng một bài toán cụ thể.

- Việc xây dựng bài toán cần sử dụng các đánh giá sau:
- $$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j \qquad (1)$$

  trong đó số các phần tử $a_i a_j$ là $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Cách xây dựng một bài toán cụ thể.

- Việc xây dựng bài toán cần sử dụng các đánh giá sau:
- $$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j \qquad (1)$$
  trong đó số các phần tử $a_i a_j$ là $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$
- $$\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j \le \frac{n-1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \qquad (2)$$

Cách xây dựng một bài toán cụ thể.

- Việc xây dựng bài toán cần sử dụng các đánh giá sau:
- $$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j \qquad (1)$$
  trong đó số các phần tử $a_i a_j$ là $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$
- $$\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j \le \frac{n-1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \qquad (2)$$
- Để thực hiện được phép nhóm theo (1) thì phải có mặt đầy đủ các phần tử $a_i a_j$ gồm $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ số hạng.

Cách xây dựng một bài toán cụ thể.

- Việc xây dựng bài toán cần sử dụng các đánh giá sau:
- $$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j \qquad (1)$$
  trong đó số các phần tử $a_i a_j$ là $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$
- $$\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j \le \frac{n-1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \qquad (2)$$
- Để thực hiện được phép nhóm theo (1) thì phải có mặt đầy đủ các phần tử $a_i a_j$ gồm $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ số hạng.
- Dựa vào cách chứng minh bài toán thì sự xuất hiện của $a_i a_j$ phải có tỉ lệ bằng nhau để có thể đánh giá theo đánh giá (2).

Cách xây dựng một bài toán cụ thể.

- Việc xây dựng bài toán cần sử dụng các đánh giá sau:
- $$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j \qquad (1)$$
  trong đó số các phần tử $a_i a_j$ là $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$
- $$\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j \le \frac{n-1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \qquad (2)$$
- Để thực hiện được phép nhóm theo (1) thì phải có mặt đầy đủ các phần tử $a_i a_j$ gồm $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ số hạng.
- Dựa vào cách chứng minh bài toán thì sự xuất hiện của $a_i a_j$ phải có tỉ lệ bằng nhau để có thể đánh giá theo đánh giá (2).
- Việc chọn giá trị hệ số r_{ij} sao cho bước 4 và 5 thỏa mãn.

Ứng dụng của đề tài khóa luận

- Phương pháp phân tích xây dựng bất đẳng thức có thể được sử dụng để xây dựng các dạng bất đẳng thức khác.

Ứng dụng của đề tài khóa luận

- Phương pháp phân tích xây dựng bất đẳng thức có thể được sử dụng để xây dựng các dạng bất đẳng thức khác.
- Từ bài toán tổng quát xây dựng vô số các bài toán mà khi ta thay đổi các điều kiện đề bài sẽ được các bài toán ở các mức độ khó dễ khác nhau.

Kết luận

- Tóm lại qua khóa luận này em đã xây dựng được một dạng bài toán bất đẳng thức xoay vòng, giải quyết trọn vẹn bài toán tổng quát.

Kết luận

- Tóm lại qua khóa luận này em đã xây dựng được một dạng bài toán bất đẳng thức xoay vòng, giải quyết trọn vẹn bài toán tổng quát.
- Đặt cơ sở cho việc xây dựng các bài toán cùng loại này (đối với trường hợp đơn giản và tổng quát).

Kết luận

- Tóm lại qua khóa luận này em đã xây dựng được một dạng bài toán bất đẳng thức xoay vòng, giải quyết trọn vẹn bài toán tổng quát.
- Đặt cơ sở cho việc xây dựng các bài toán cùng loại này (đối với trường hợp đơn giản và tổng quát).
- Hướng phát triển tiếp: tìm cách nâng bậc của cả tử và mẫu số lên và tìm cách giải quyết bài toán tổng quát.