BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

HUỲNH KỲ ANH

MẶT BLW VÀ BÀI TOÁN BJÖRLING

Chuyên ngành: HÌNH HỌC VÀ TÔPÔ
Mã số: 604610

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC
(Bản tóm tắt)

Người hướng dẫn khoa học:
PGS. TS. ĐOÀN THẾ HIẾU

HUẾ, NĂM 2006

(để ý rằng, do tính giải tích của β và V, các không điểm của $\langle \beta', a\beta' - bV' \rangle$ hoặc cô lập, hoặc là bất kỳ điểm nào của I;) theo Hệ quả 10 trong [14], khi cho trước β và với V được chọn thích hợp để (4.1) xảy ra (trong đó, $a = 0$), ta xây dựng được duy nhất `flat front` Σ, sao cho β chỉ gồm các điểm suy biến của Σ;

8. giải Bài toán Björling cho các mặt `ELW` [13]; mặt `ELW` trong $\mathbb{R}^3$ có độ cong Gauss K và độ cong trung bình H thỏa mãn phương trình tương tự (2.21); (có thể nghi ngờ rằng, Bài toán Björling trong trường hợp này *dễ hơn* cho các mặt BLW; thực tế, trong [13] ta chỉ có biểu diễn `harmonic` chứ không phải là bảo giác của mặt `ELW`, và đó chính là trở ngại lớn nhất;)

9. theo [6], [15], ánh xạ Gauss `hyperbolic` của mặt chính quy $\psi : S \to \mathbb{H}^3$ là phân hình khi và chỉ khi ψ là mặt `CMC1`; một phần của kết quả này được tổng quát hóa trong Định lý 8; vậy ngược lại, khi $\sigma = aI + bII$ là `metric` xác định dương và G phân hình (hoặc phản phân hình), liệu ta có suy ra được ψ là mặt BLW?

Ngoài ra, còn có Bài toán Björling cho mặt `maximal` trong $\mathbb{L}^n$. Những tính toán của Phó Giáo sư Đoàn Thế Hiếu dựa trên [3], [4] cho thấy bài toán này có thể giải được bằng việc lấy tích phân của các hàm không có chu kỳ thực.

Chương 1: **Giới thiệu**

Bài toán Björling cổ điển được E. G. Björling giới thiệu năm 1844 và được H. A. Schwarz giải xong vào năm 1890, nội dung là tìm các mặt cực tiểu trong $\mathbb{R}^3$ khi biết trước một đường cong trắc địa trên mặt đó. Hệ quả quan trọng của sự tồn tại duy nhất nghiệm của Bài toán là các mặt cực tiểu Σ đối xứng qua bất kỳ mặt phẳng nào trực giao với Σ.

Mở rộng hiển nhiên của Bài toán Björling cổ điển là tìm mặt Σ thuộc lớp $\mathfrak{B}$, khi biết trước đường cong β trên mặt đó và trường véc tơ pháp tuyến đơn vị của Σ dọc β. Lớp mặt $\mathfrak{B}$ có thể là `CMC1`, `ELW`, `flat`, ... Trong Phụ lục A là danh sách các Bài toán Björling đã được giải. Các bài toán này đều có nghiệm duy nhất và đều dẫn tới hệ quả về tính đối xứng của mặt thuộc lớp đang xét. Ngoài ra, việc giải Bài toán Björling cho phép đưa ra nhiều ví dụ tường minh của mặt thuộc lớp $\mathfrak{B}$, và dẫn tới các ứng dụng khác. Chẳng hạn, phân loại mặt `CMC1` có `topo` hình trụ [15], phân loại `flat front` với kỳ dị cô lập nhúng được [14], ...

Bao hàm Bài toán Björling cho mặt `CMC1` [15] và mặt `flat` chính quy [14], luận văn này đặt ra và giải quyết Bài toán Björling cho mặt BLW là mặt có độ cong trung bình H và độ cong Gauss K_I thỏa mãn

$$2a(H-1) + bK_I = 0, \tag{1.1}$$

với a, b là hằng số thực, $a + b \neq 0$. Kỹ thuật giải bài toán này về cơ bản dựa theo [15]. Trong [15], để xây dựng nghiệm, tác giả sử dụng một kết quả từ [6] liên quan đến tính phân hình của ánh xạ Gauss `hyperbolic`. Kết quả này được tổng quát hóa một phần trong Định lý 8, là yếu tố then chốt để giải Bài toán Björling cho mặt BLW. Vài chú thích khác liên quan đến vấn đề này có trong Chương 4 (Bài toán 9).

Nội dung của luận văn qua từng chương như sau:

Chương 1: Giới thiệu đề tài và tóm tắt nội dung các chương.

Chương 2: Chương này trình bày sơ lược các kiến thức, bổ đề cơ bản, cần thiết cho việc giải Bài toán Björling ở Chương 3: không gian `hyperbolic` (Mục 2.1), lý thuyết địa phương của các mặt trong $\mathbb{H}^3$ (Mục 2.2), hàm (phản) phân hình trên mặt Riemann (Mục 2.3), tính chất bảo giác, các bổ đề cơ bản về mặt BLW (Mục 2.5) và về bài toán Cauchy cho phương trình Liouville (Mục 2.6). Trừ (2.10), (2.11), (2.12), các chi tiết khác có thể xem trong tài liệu được trích dẫn.

Mối liên quan giữa lý thuyết các mặt với phương trình Liouville thể hiện ở chỗ: nếu $ds^2 = \phi|dz|^2$ là `metric` Riemann trên miền phẳng $U \subset \mathbb{C}$, thì ϕ thỏa mãn phương trình Liouville (2.26) khi và chỉ khi ds^2 có độ cong hằng c. Ta gặp lại mối quan hệ này trong Mục 3.2.2. Từ đó, thấy sự khác biệt khi tìm nghiệm của Bài toán Björling cho mặt cực tiểu (`minimal`) trong $\mathbb{R}^3$ và cho mặt BLW trong $\mathbb{H}^3$. Trường hợp đầu tiên chỉ đơn giản là lấy tích phân của các hàm không có chu kỳ thực, bài toán sau lại cần đến các phương trình đạo hàm riêng.

Chương 3: Chương này là nội dung chính của luận văn. Ta sẽ phát biểu Bài toán Björling cho mặt BLW (Mục 3.1), chứng minh Định lý 7 (về nghiệm của Bài toán Björling) và Định lý 8 (về tính phân hình của ánh xạ Gauss `hyperbolic`).

2. khảo sát mặt BLW đầy đủ với độ cong toàn phần kép (`dual`) hữu hạn đặc biệt;

3. tìm công thức tường minh của nghiệm với điều kiện ban đầu (β, V), trong đó, β là đường cong phẳng;

4. giải Bài toán Björling khi G ở (3.2) là ánh xạ hằng; như đã nói ở Mục 3.5.1, nghiệm (nếu có) trong trường hợp này phải là một phần của `horosphere`;

5. tìm lời giải hình học của bài toán Cauchy cho phương trình Liouville; trong [15], từ sự duy nhất nghiệm của Bài toán Björling cho mặt `CMC1`, tác giả tiếp cận phương trình (2.36) (khi $c = 1$) một cách hình học; phương pháp này phục hồi ánh xạ Gauss thứ cấp (liên quan đến tính chất `rigid`) của mặt `CMC1` từ điều kiện ban đầu và mô tả nghiệm của (2.36) qua ánh xạ đó;

6. tìm "nghiệm"[2] của Bài toán Björling khi chấp nhận thêm các kỳ dị, chẳng hạn khi G' hoặc $\langle \beta', a\beta' - bV' \rangle$ có thể triệt tiêu tại một số điểm trên I; trong [14], tác giả giải Bài toán Björling cho các `flat front` (chỉ khác `flat surface` ở chỗ trên `flat front` có thể có kỳ dị) và từ đó phân loại được `flat front` với kỳ dị cô lập nhúng được (`embedded isolated singularities`);

7. giải Bài toán Björling khi điều kiện ban đầu (β, V) thỏa mãn

$$\langle \beta', a\beta' - bV' \rangle \equiv 0; \tag{4.1}$$

[2]Khi chấp nhận thêm các kỳ dị, ta phải mở rộng khái niệm mặt BLW; cụ thể, mặt ψ là BLW nếu tại các điểm chính quy của nó ta có (2.21). Ta không nhắc lại điều này trong toàn Chương 4.

3.5 Chú thích

Trong mục này, sử dụng lại các tính toán trong chứng minh của Định lý 7, ta chứng minh được Định lý 8, từ đó giải thích được sự khác nhau giữa hai trường hợp $a+b=1$ và $a+b=-1$. Mục này cũng có một số chú thích khác về sự tồn tại của tham số hóa bảo giác, về điều kiện ban đầu (β, V).

Chương 4: **Kết luận**

Luận văn này đặt ra và giải quyết Bài toán Björling cho mặt BLW. Định lý 7 khẳng định Bài toán Björling có nghiệm duy nhất. Biểu thức biểu diễn nghiệm không dùng đến biểu diễn bảo giác [12], và do đó, đưa ra *biểu diễn Björling* cho các mặt BLW. Nội dung của Định lý 7 bao hàm các mặt `CMC1` [15] và `flat` chính quy [14]. Định lý 8 cho phép nhận biết tính phân hình của ánh xạ Gauss `hyperbolic` của mặt BLW dựa theo dấu của $a+b$. Ngoài ra, tác giả chứng minh được các đẳng thức (2.10), (2.11), (2.12) liên quan đến tích có hướng trong $\mathbb{L}^4$.

Vì lý do thời gian, luận văn này chưa xét đến một trong những hệ quả quan trọng của việc giải thành công Bài toán Björling, là *tính đối xứng của mặt BLW*. Mặc dù vậy, có thể nói hệ quả này được chứng minh đơn giản, hoàn toàn tương tự như trong [15], khi đã có định nghĩa hợp lý của tính đối xứng.

Dưới đây là một số bài toán[1] có liên quan đến đề tài:

1. khảo sát mặt BLW có `topo` của hình trụ (`cylinder`);

[1]Các bài toán 1, 2, 3 đã được xét trong [15] cho mặt `CMC1`.

Để tiện lợi cho việc theo dõi, chứng minh của Định lý 7 này được chia thành từng mục. Trường hợp đầu tiên $(a+b=1)$ được trình bày trong Mục 3.2 và Mục 3.3. Trường hợp còn lại, do sự tương tự, được trình bày sơ lược trong Mục 3.4.

Những chú thích trong Mục 3.5 rất quan trọng, là phần không thể thiếu trong chứng minh của Định lý 7. Trong mục này, ta cũng sẽ chứng minh Định lý 8.

Chương 4: Kết luận về đóng góp của luận văn; đề nghị một số bài toán mở.

Phụ lục A: Liệt kê các Bài toán Björling đã giải. Chúng đều có duy nhất nghiệm và đều có hệ quả liên quan đến tính đối xứng của các mặt trong lớp được xét.

Phụ lục B: Các thủ tục `Maple` [18] để tính tích vô hướng $\langle \psi_z \wedge \psi_{\overline{z}}, \eta \rangle$ ở (3.57) và (3.84).

Tài liệu tham khảo: Danh sách các tài liệu đã tham khảo.

Luận văn này được thực hiện dưới sự hướng dẫn của Phó Giáo sư Đoàn Thế Hiếu và sự giúp đỡ của Giáo sư José Antonio Gálvez, được hỗ trợ một phần kinh phí bởi trường Cao đẳng Sư phạm Quảng Nam. Mã nguồn LaTeX của luận văn có thể tải về từ

`http://metakyanh.sarovar.org/index.php?cat=mthesis` .

Chương 2: **Kiến thức chuẩn bị**

Ta chỉ trình bày ở đây định nghĩa của mặt BLW. Các mục khác của chương này, về không gian `hyperbolic`, lý thuyết địa phương của các mặt, các bổ đề về mặt BLW, bài toán Cauchy cho phương trình Liouville, có thể xem trong bản chính của luận văn.

Định nghĩa 1 (Mặt BLW): *Mặt chính quy $\psi : S \to \mathbb{H}^3$ được gọi là* BLW *nếu có các hằng số thực a, b sao cho*

$$2a(H-1) + bK_I = 2a(H-1) + b(K-1) = 0, \qquad (2.21)$$

với H là độ cong trung bình, $K_I = K - 1$ là độ cong Gauss và K là độ cong Gauss-Kronecker của ψ.

Cho mặt BLW $\psi : S \to \mathbb{H}^3$ thỏa mãn (2.21). Khi nói đến a, b, ta ngầm hiểu $|a+b| = 1$ và dấu của chúng đã được chọn để $\sigma = aI + bII$ trở thành `metric` xác định dương. Ta coi S là mặt Riemann với cấu trúc bảo giác cảm sinh bởi `metric` σ.

Chương 3: **Bài toán Björling**

3.1 Bài toán Björling

Bài toán Björling cho mặt BLW được phát biểu như sau đây.

Cho các hằng số thực a, b, với $|a+b| = 1$, đường cong giải tích, chính quy $\beta : I \to \mathbb{H}^3$ và trường véc tơ giải tích $V : I \to \mathbb{S}^3_1$ dọc β, sao cho với mọi $s \in I$

$$\begin{aligned} &\big\langle \beta(s), V(s) \big\rangle = \big\langle \beta'(s), V(s) \big\rangle = 0, \\ &\big\langle \beta'(s), a\beta'(s) - bV'(s) \big\rangle > 0. \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Tìm mặt BLW $\psi : S \to \mathbb{H}^3$ thỏa mãn (2.21), sao cho tồn tại đường cong giải tích, chính quy $\Gamma \subset S$, với $\psi(\Gamma) = \beta$, và V là trường véc tơ pháp tuyến đơn vị của ψ dọc β. Ta gọi mỗi mặt BLW tìm được là nghiệm của Bài toán Björling *với* điều kiện ban đầu (β, V).

Kết quả của toàn chương thể hiện trong hai định lý sau.

Dọc theo β, hệ số này dương. Vậy σ xác định dương. Tiếp theo,

$$\langle \psi_s \wedge \psi_t, \psi_s \wedge \psi_t \rangle = |B_z|^2 - |U|^2, \qquad (3.51)$$

do đó, ψ chính quy. Trong Mục 3.3.4, ta có được η là pháp véc tơ, nhận giá trị trong $\mathbb{S}^3_1$. Ta có

$$\langle \psi_s \wedge \psi_t, \eta \rangle = |B_z|^2 - |U|^2. \qquad (3.58)$$

Do $a + b = 1$ nên từ tính dương của σ, (3.45) và (3.58) ta suy ra $\langle \psi_s \wedge \psi_t, \eta \rangle > 0$. Vậy η là pháp véc tơ đơn vị của ψ. Sử dụng hệ

$$\begin{cases} -HB_z + \Upsilon \overline{U} = -B_z, \\ -HU + \Upsilon \overline{B}_z = \rho G_z - U. \end{cases} \qquad (3.59)$$

ta tính được H, K và có $2a(H-1) + b(K-1) = 0$, tức ψ là mặt BLW thỏa mãn (2.21). Cuối cùng, trong Mục 3.3.6, ta chứng tỏ được ψ thỏa mãn $\psi(s,0) = \beta(s)$ và $\eta(s,0) = V(s)$ với mọi $s \in I$. Vậy ψ là nghiệm của Bài toán Björling.

3.4 Trường hợp $a + b = -1$

Khác biệt so với trường hợp $a + b = 1$, ở đây, ta sẽ dùng thác triển phản phân hình của $G(s)$ thay cho thác triển phân hình. Xem chú thích ở Mục 3.5.2 về lựa chọn này. Các bước lập luận chứng minh tính duy nhất và sự tồn tại nghiệm được tiến hành hoàn toàn tương tự trường hợp $a + b = 1$.

3.3 Sự tồn tại nghiệm

Cho điều kiện ban đầu (β, V) thỏa mãn các điều kiện trong Định lý 7, với $a + b = 1$. Ta chứng minh Bài toán Björling có nghiệm thỏa mãn (2.21). Đặt $v = \beta + V : I \to \mathbb{N}^3_+$. Định nghĩa đường cong $G : I \to \mathbb{C}$ bởi

$$G(s) = \frac{v_1(s) - iv_2(s)}{v_0(s) + v_3(s)}. \tag{3.30}$$

Ký hiệu D là tập hợp con mở của $\mathbb{C}$, chứa I như là trục thực, trên đó, $\beta(s)$ và $V(s)$ có thác triển chỉnh hình $\beta(z)$, $V(z)$. Khi đó, ta có thác triển phân hình $G(z) : D \to \overline{\mathbb{C}}$

$$G(z) = \frac{v_1(z) - iv_2(z)}{v_0(z) + v_3(z)}. \tag{3.31}$$

Giả sử $\rho : D \subset \mathbb{C} \to [0; +\infty)$ là nghiệm duy nhất của hệ (3.4).

Xét $U = D \setminus P$ là tập hợp con mở của D, trong đó, P là tập hợp con đóng của D gồm các không điểm của ρ, các không điểm và cực điểm của G_z. (Rõ ràng, U chứa toàn bộ I.) Trên U, đặt $\psi = F\Omega F^* : U \to \mathbb{H}^3$, với F, Ω được cho ở (3.25), (3.29); và

$$N = F \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} F^*. \tag{3.32}$$

Đặt $U = AG_z + \overline{B}_z$, với A, B, C được cho bởi

$$\Omega = \begin{bmatrix} A & B \\ \overline{B} & C \end{bmatrix}. \tag{3.33}$$

Tính toán trực tiếp ta thấy σ "bảo giác" với hệ số

$$(a+b)\left\{|B_z|^2 - |U|^2\right\}. \tag{3.45}$$

Định lý 7: *Cho điều kiện ban đầu (β, V) như trong phát biểu của Bài toán Björling. Giả sử $v = \beta + V$ thỏa mãn $v_0(s) + v_3(s) \neq 0$ với mọi $s \in I$, và ánh xạ $G : I \to \mathbb{C}$*

$$G = \frac{v_1 - iv_2}{v_0 + v_3} : I \to \mathbb{C} \tag{3.2}$$

có đạo hàm không triệt tiêu tại điểm nào của I. Khi đó, Bài toán Björling với điều kiện ban đầu (β, V) có duy nhất nghiệm; nghiệm $\psi : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{H}^3$ được xây dựng trong lân cận của β như sau:

1. *nếu $a+b = 1$, ký hiệu $\beta(z)$ và $V(z)$ lần lượt là thác triển chỉnh hình của $\beta(s)$, $V(s)$; đặt $v(z) = \beta(z) + V(z)$ và*

   $$G(z) = \frac{v_1(z) - iv_2(z)}{v_0(z) + v_3(z)}; \tag{3.3}$$

   gọi $\rho : D \to [0; +\infty)$ là nghiệm duy nhất của bài toán Cauchy

   $$\begin{cases} 4\big(\ln \rho\big)_{z\overline{z}} = -\dfrac{a}{a+b}\,\rho^2 |G_z|^2, \\ \rho(s,0) = v_0(s) + v_3(s), \\ \rho_z(s,0) = \dfrac{1}{2}\Big\{v_0' + v_3' + i\left[(V \wedge v')_0 + (V \wedge v')_3\right]\Big\}; \end{cases} \tag{3.4}$$

   khi đó, $\psi = F\Omega F^* : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{H}^3$ với

   $$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ G & 1 \end{bmatrix};\ \Omega = \begin{bmatrix} \dfrac{2a+b}{2(a+b)}\,\rho + \dfrac{2\rho_{z\overline{z}}}{\rho^2 |G_z|^2} & \dfrac{2\rho_z}{\rho^2 G_z} \\ \dfrac{2\rho_{\overline{z}}}{\rho^2 \overline{G_z}} & \dfrac{2}{\rho} \end{bmatrix}; \tag{3.5}$$

2. *nếu $a + b = -1$, ký hiệu $\beta(z)$ và $V(z)$ lần lượt là thác triển phản chỉnh hình của $\beta(s)$ và $V(s)$; đặt $v(z) = \beta(z) + V(z)$ và $G(z)$ như (3.3); gọi $\rho : D \to [0; +\infty)$ là nghiệm duy nhất của*

bài toán Cauchy

$$\begin{cases} 4\big(\ln\rho\big)_{z\overline{z}} = -\dfrac{a}{a+b}\,\rho^2|\overline{G}_z|^2, \\ \rho(s,0) = v_0(s) + v_3(s), \\ \rho_z(s,0) = \dfrac{1}{2}\Big\{v_0' + v_3' - i\left[(V\wedge v')_0 + (V\wedge v')_3\right]\Big\}; \end{cases} \tag{3.6}$$

khi đó, $\psi = F\Omega F^* : D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{H}^3$ *với*

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ G & 1 \end{bmatrix};\ \Omega = \begin{bmatrix} \dfrac{2a+b}{2(a+b)}\,\rho + \dfrac{2\rho_{z\overline{z}}}{\rho^2|\overline{G}_z|^2} & \dfrac{2\rho_{\overline{z}}}{\rho^2 G_{\overline{z}}} \\ \dfrac{2\rho_z}{\rho^2\overline{G}_z} & \dfrac{2}{\rho} \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Trong cả hai trường hợp, G là ánh xạ Gauss `hyperbolic` *của ψ; nghiệm của* (3.4), (3.7) *được xây dựng theo Mục 2.6.*

Trong phát biểu của Định lý 7, ta giả thiết $v = \beta + V$ và G ở (3.2) thỏa mãn $v_0(s) + v_3(s) \neq 0$ và $G'(s) \neq 0$ với mọi $s \in I$. Điều kiện thứ nhất thể bỏ qua; điều kiện còn lại nhằm hạn chế các kỳ dị. Ở Mục 3.5.1 ta sẽ nói rõ hơn về điều này.

Định lý 8: *Cho mặt BLW $\psi : S \to \mathbb{H}^3$ thỏa mãn* (2.21) *và $\psi(S)$ không phải là một phần của* `horosphere`*. Khi đó, ánh xạ Gauss* `hyperbolic` *G của ψ phân hình khi $a+b>0$, phản phân hình khi* $a+b<0$.

Kể từ lúc này cho tới trước Mục 3.4, ta luôn giả sử rằng $a+b=1$.

3.2 Sự duy nhất của nghiệm

Giả sử tồn tại mặt BLW $\psi : S \to \mathbb{H}^3$ thỏa mãn các yêu cầu của bài toán. Ta chứng minh rằng, về mặt địa phương, ψ được xác định

hoàn toàn theo điều kiện ban đầu (β, V), và có thể biểu diễn bằng một biểu thức của điều kiện đó. Từ tính liên tục giải tích [5] của mặt BLW, ta suy ra tính duy nhất của nghiệm.

Theo Mục 3.2.1, mặt BLW của ta có thể biểu diễn bởi

$$\psi : D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{H}^3, \qquad \psi(w) = \chi\big(\gamma(w)\big), \tag{3.9}$$

và với mọi $s \in J := (s_0-\delta; s_0+\delta) \subset I$ ta có

$$\begin{aligned} \psi(s,0) &= \chi\big(\gamma(s)\big) = \beta(s), \\ \eta(s,0) &= \eta\big(\gamma(s)\big) = V(s). \end{aligned} \tag{3.10}$$

(Ta lạm dụng ký hiệu ψ để chỉ mặt BLW đồng thời chỉ một tham số hóa của mặt đó.) Ký hiệu $v = \beta + V : I \to \mathbb{N}^3_+$ và G là ánh xạ Gauss `hyperbolic` của mặt BLW. Ký hiệu U là tập hợp con mở của D, chứa J, sao cho trên đó $\beta(s)$ và $V(s)$ có thác triển chỉnh hình $\beta(z)$, $V(z)$. Vì G phân hình (như chú thích ở Mục 3.5.2), nên theo định lý về tính duy nhất, trên D ta có

$$G(z) = \frac{v_1(z) - i\,v_2(z)}{v_0(z) + v_3(z)}. \tag{3.12}$$

Ta biểu diễn

$$\psi + \eta = \rho\begin{bmatrix} 1 & \overline{G} \\ G & G\overline{G} \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

với $\rho = N_0 + N_3 : D \to [0; +\infty)$ là hàm trơn và $N = \psi + \eta$. Mục 3.2.2 và Mục 3.2.3 chứng tỏ ρ thỏa mãn bài toán Cauchy (3.4), và $\psi = F\Omega F^*$ với F, Ω cho bởi (3.5). Đó là điều phải chứng minh.