BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

HUỲNH KỲ ANH

MẶT BLW VÀ BÀI TOÁN BJÖRLING

Chuyên ngành: **HÌNH HỌC VÀ TÔPÔ**
Mã số: **60 46 10**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: **PGS. TS. ĐOÀN THẾ HIẾU**

HUẾ, NĂM 2006

Lời cam đoan

Tôi cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, các số liệu và kết quả nghiên cứu nêu trong luận văn là trung thực, được các đồng tác giả cho phép sử dụng và chưa từng được công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Huỳnh Kỳ Anh

Lời cám ơn

Tôi vô cùng biết ơn

Phó Giáo sư ĐOÀN THẾ HIẾU đã định hướng tôi nghiên cứu Hình học trên không gian Hyperbolic, một nhánh phát triển rất năng động của Hình học Vi phân; Phó Giáo sư là người trực tiếp hướng dẫn tôi thực hiện luận văn này;

Giáo sư JOSÉ ANTONIO GÁLVEZ đã khuyến khích tôi giải Bài toán Björling cho mặt BLW, đã cung cấp cho tôi các tài liệu tham khảo; Giáo sư đã dành nhiều thời gian giải thích cho tôi các sự kiện cơ bản của Hình học Vi phân và các chi tiết trong [12], [15].

Tôi gửi lời cám ơn

NGUYỄN VĂN HẠNH, bạn đồng môn, đã chia sẻ niềm yêu thích Toán học, ý tưởng, tài liệu với tôi trong hai năm qua tại Đại học Huế, đã cùng tôi thực hiện các seminar liên quan đến luận văn này.

Tôi gửi lời tri ân đến

trường Cao đẳng Sư phạm Quảng Nam đã hỗ trợ kinh phí và tạo điều kiện thuận lợi để tôi thực hiện đề tài;

các thầy giáo đã hướng dẫn tôi nghiên cứu Toán học trong khóa học 2004 - 2006 tại Đại học Huế;

gia đình và các bạn bè đã hiểu, chia sẻ cảm xúc trong quá trình tôi thực hiện đề tài.

HUỲNH KỲ ANH

Mục lục

Quy ước. Ký hiệu

Trong luận văn này, các thuật ngữ tiếng Anh được định dạng với kiểu chữ `typewriter`, các đa tạp đều liên thông, và các ký hiệu, chữ viết tắt được cho trong bảng sau đây.

S	:	đa tạp hai chiều, liên thông, có hướng
I, J	:	khoảng mở trong $\mathbb{R}$
I, II	:	dạng cơ bản thứ nhất, thứ hai
F^*	:	liên hợp phức của ma trận F; $F^* = \overline{F}^t$
$\overline{\mathbb{C}}$	:	mặt cầu Riemann, `compact` hóa của $\mathbb{C}$; $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	:	tích vô hướng trong $\mathbb{L}^4$
$z = s + it$	:	tham số hóa với hai tọa độ s, t
$\partial_z, \partial_{\overline{z}}$	:	toán tử Wirtinger; $\partial_z = (\partial_s - i\partial_t)/2$, $\partial_{\overline{z}} = (\partial_s + i\partial_t)/2$
$F_z, F_{\overline{z}}$	:	tác động của toán tử Wirtinger lên F; $F_z = \partial_z F$, $F_{\overline{z}} = \partial_{\overline{z}} F$
$\operatorname{Re} F$	:	phần thực của số phức F
ΔF	:	tác động của toán tử Laplace lên hàm F
F_0, F_1, F_2, F_3	:	các tọa độ của véc tơ $F = (F_0, F_1, F_2, F_3)$
BLW	:	Linear Weingarten surface of Bryant type
`CMC1`	:	Constant Mean Curvature One
`ELW`	:	Elliptic Linear Weingarten

Chương 1

Giới thiệu

Bài toán Björling cổ điển được E. G. Björling giới thiệu năm 1844 và được H. A. Schwarz giải xong vào năm 1890, nội dung là tìm các mặt cực tiểu trong $\mathbb{R}^3$ khi biết trước một đường cong trắc địa trên mặt đó. Hệ quả quan trọng của sự tồn tại duy nhất nghiệm của Bài toán là các mặt cực tiểu Σ đối xứng qua bất kỳ mặt phẳng nào trực giao với Σ.

Mở rộng hiển nhiên của Bài toán Björling cổ điển là tìm mặt Σ thuộc lớp $\mathfrak{B}$, khi biết trước đường cong β trên mặt đó và trường véc tơ pháp tuyến đơn vị của Σ dọc β. Lớp mặt $\mathfrak{B}$ có thể là `CMC1`, `ELW`, `flat`, ... Trong Phụ lục A là danh sách các Bài toán Björling đã được giải. Các bài toán này đều có nghiệm duy nhất và đều dẫn tới hệ quả về tính đối xứng của mặt thuộc lớp đang xét. Ngoài ra, việc giải Bài toán Björling cho phép đưa ra nhiều ví dụ tường minh của mặt thuộc lớp $\mathfrak{B}$, và dẫn tới các ứng dụng khác. Chẳng hạn, phân loại mặt `CMC1` có `topo` hình trụ [15], phân loại `flat front` với kỳ dị cô lập nhúng được [14], ...

Bao hàm Bài toán Björling cho mặt `CMC1` [15] và mặt `flat` chính quy [14], luận văn này đặt ra và giải quyết Bài toán Björling cho mặt BLW là mặt có độ cong trung bình H và độ cong Gauss K_I thỏa mãn

$$2a(H-1) + bK_I = 0, \tag{1.1}$$

với a, b là hằng số thực, $a + b \neq 0$. Kỹ thuật giải bài toán này về cơ bản dựa theo [15]. Trong [15], để xây dựng nghiệm, tác giả sử dụng một kết quả từ [6] liên quan đến tính phân hình của ánh xạ Gauss `hyperbolic`. Kết quả này được tổng quát hóa một phần trong Định lý 8, là yếu tố then chốt để giải Bài toán Björling cho mặt BLW. Vài chú thích khác liên quan đến vấn đề này có trong Chương 4 (Bài toán 9).

Nội dung của luận văn qua từng chương như sau:

Chương 1: Giới thiệu đề tài và tóm tắt nội dung các chương.

Chương 2: Chương này trình bày sơ lược các kiến thức, bổ đề cơ bản, cần thiết cho việc giải Bài toán Björling ở Chương 3: không gian `hyperbolic` (Mục 2.1), lý thuyết địa phương của các mặt trong $\mathbb{H}^3$ (Mục 2.2), hàm (phản) phân hình trên mặt Riemann (Mục 2.3), tính chất bảo giác, các bổ đề cơ bản về mặt BLW (Mục 2.5) và về bài toán Cauchy cho phương trình Liouville (Mục 2.6). Trừ (2.10), (2.11), (2.12), các chi tiết khác có thể xem trong tài liệu được trích dẫn.

Mối liên quan giữa lý thuyết các mặt với phương trình Liouville thể hiện ở chỗ: nếu $ds^2 = \phi|dz|^2$ là `metric` Riemann trên miền phẳng $U \subset \mathbb{C}$, thì ϕ thỏa mãn phương trình Liouville (2.26) khi và chỉ khi ds^2 có độ cong hằng c. Ta gặp lại mối quan hệ này trong Mục 3.2.2. Từ đó, thấy sự khác biệt khi tìm nghiệm của Bài toán Björling cho mặt cực tiểu (`minimal`) trong $\mathbb{R}^3$ và cho mặt BLW trong $\mathbb{H}^3$. Trường hợp đầu tiên chỉ đơn giản là lấy tích phân của các hàm không có chu kỳ thực, bài toán sau lại cần đến các phương trình đạo hàm riêng.

Chương 3: Chương này là nội dung chính của luận văn. Ta sẽ phát biểu Bài toán Björling cho mặt BLW (Mục 3.1), chứng minh Định lý 7 (về nghiệm của Bài toán Björling) và Định lý 8 (về tính phân hình của ánh xạ Gauss `hyperbolic`).

Để tiện lợi cho việc theo dõi, chứng minh của Định lý 7 này được chia thành từng mục. Trường hợp đầu tiên ($a + b = 1$) được trình bày trong Mục 3.2 và Mục 3.3. Trường hợp còn lại, do sự tương tự, được trình bày sơ lược trong Mục 3.4.

Những chú thích trong Mục 3.5 rất quan trọng, là phần không thể thiếu trong chứng minh của Định lý 7. Trong mục này, ta cũng sẽ chứng minh Định lý 8.

Chương 4: Kết luận về đóng góp của luận văn; đề nghị một số bài toán mở.

Phụ lục A: Liệt kê các Bài toán Björling đã giải. Chúng đều có duy nhất nghiệm và đều có hệ quả liên quan đến tính đối xứng của các mặt trong lớp được xét.

Phụ lục B: Các thủ tục `Maple` [18] để tính tích vô hướng $\langle \psi_z \wedge \psi_{\overline{z}}, \eta \rangle$ ở (3.56) và (3.83).

Tài liệu tham khảo: Danh sách các tài liệu đã tham khảo.

Luận văn này được thực hiện dưới sự hướng dẫn của Phó Giáo sư Đoàn Thế Hiếu và sự giúp đỡ của Giáo sư José Antonio Gálvez, được hỗ trợ một phần kinh phí bởi trường Cao đẳng Sư phạm Quảng Nam. Mã nguồn LaTeX của luận văn có tại

`http://metakyanh.sarovar.org/index.php?cat=mthesis` .

Chương 2

Kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày sơ lược các kiến thức, bổ đề cơ bản, cần thiết cho việc giải Bài toán Björling ở Chương 3: không gian `hyperbolic` (Mục 2.1), lý thuyết địa phương của các mặt trong $\mathbb{H}^3$ (Mục 2.2), hàm (phản) phân hình trên mặt Riemann (Mục 2.3), tính chất bảo giác, các bổ đề cơ bản về mặt BLW (Mục 2.5) và về bài toán Cauchy cho phương trình Liouville (Mục 2.6). Trừ (2.10), (2.11), (2.12), các chi tiết khác có thể xem trong tài liệu được trích dẫn.

Mối liên quan giữa lý thuyết các mặt với phương trình Liouville thể hiện ở chỗ: nếu $ds^2 = \phi|dz|^2$ là `metric` Riemann trên miền phẳng $U \subset \mathbb{C}$, thì ϕ thỏa mãn phương trình Liouville (2.26) khi và chỉ khi ds^2 có độ cong hằng c. Ta gặp lại mối quan hệ này trong Mục 3.2.2. Từ đó, thấy sự khác biệt khi tìm nghiệm của Bài toán Björling cho mặt cực tiểu (`minimal`) trong $\mathbb{R}^3$ và cho mặt BLW trong $\mathbb{H}^3$. Trường hợp đầu tiên chỉ đơn giản là lấy tích phân của các hàm không có chu kỳ thực, bài toán sau lại cần đến các phương trình đạo hàm riêng.

2.1 Không gian `hyperbolic` $\mathbb{H}^3$

Chi tiết về không gian `hyperbolic` $\mathbb{H}^3$ có thể xem trong [7], [12], [15].

Không gian Lorentz $\mathbb{L}^4$ là không gian véc tơ $\mathbb{R}^4$ được trang bị giả `metric` Lorentz

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2. \tag{2.1}$$

Các bộ phận

$$\mathbb{S}^3_1 = \big\{x \in \mathbb{L}^4 : \langle x, x\rangle = 1\big\}, \tag{2.2}$$

$$\mathbb{N}^3_+ = \big\{x \in \mathbb{L}^4 : \langle x, x\rangle = 0,\ x_0 > 0\big\} \tag{2.3}$$

lần lượt được gọi là *không gian de-Sitter ba chiều* và *nón ánh sáng tương lai*. Bộ phận

$$\mathbb{H}^3 = \{x \in \mathbb{L}^4 : \langle x, x\rangle = -1,\ x_0 > 0\} \tag{2.4}$$

được gọi là *mô hình Minkowski của không gian hyperbolic (ba chiều)*. Tại $p \in \mathbb{H}^3$, ta có không gian tiếp xúc

$$T_p\mathbb{H}^3 = \{x \in \mathbb{L}^4 : \langle x, p\rangle = 0\}. \tag{2.5}$$

Có thể xem $\mathbb{L}^4$ là *không gian* Herm(2) các ma trận `hermit` cấp 2, bằng cách đồng nhất véc tơ $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4$ với ma trận

$$\begin{bmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Với phép đồng nhất này, $\langle m, m\rangle = -\det(m)$ với mọi $m \in \mathrm{Herm}(2)$, và như vậy,

$$\mathbb{H}^3 = \big\{m \in \mathrm{Herm}(2) : \det(m) = 1\big\}. \tag{2.7}$$

Cho p, u, v thuộc $\mathbb{L}^4$. *Tích chéo* $p \times u \times v$ hay *tích có hướng của* u, v *tại điểm* p là

$$p \times u \times v = u \wedge v = -\det \begin{bmatrix} -i & j & k & l \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}, \tag{2.8}$$

với (i, j, k, l) là cơ sở tự nhiên của $\mathbb{R}^4$. Với w bất kỳ trong $\mathbb{L}^4$ thì

$$\langle p \times u \times v, w\rangle = \det(p, u, v, w). \tag{2.9}$$

Nếu $\langle u, v\rangle = 0$, $w = p \times u \times v$ và $\alpha = \langle u, u\rangle$, $\beta = \langle v, v\rangle$ thì

$$\langle w, w\rangle = -\alpha\beta\langle p, p\rangle + \alpha\langle p, v\rangle^2 + \beta\langle p, u\rangle^2. \tag{2.10}$$

Đẳng thức (2.10) được kiểm tra bằng cách triển khai các định thức ở vế trái. Sử dụng (2.10), ta chứng minh được rằng, với u, v, w thuộc $T_p\mathbb{H}^3$, véc tơ $u \wedge v$ thuộc $T_p\mathbb{H}^3$ và

$$\langle u \wedge v, u \wedge v\rangle = \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle - \langle u, v\rangle^2; \tag{2.11}$$

$$w \wedge (u \wedge v) = u\langle w, v\rangle - v\langle w, u\rangle. \tag{2.12}$$

Giả `metric` (2.1) hạn chế trên mỗi không gian tiếp xúc $T_p\mathbb{H}^3$ xác định dương, và do đó

$\mathbb{H}^3$ là đa tạp Riemann. Theo [7], $\mathbb{H}^3$ đơn liên, đầy đủ, có độ cong `sectional` hằng -1. Chú ý rằng, với $(\beta, v) \in \mathbb{H}^3 \times \mathbb{S}_1^3$ sao cho $\langle \beta, v \rangle = 0$ thì $n = \beta + v \in \mathbb{N}_+^3$ và $n_0 + n_3 \geq 0$.

2.2 Lý thuyết địa phương của mặt

Chi tiết về lý thuyết địa phương của các mặt có thể xem trong [8], [9].

Cho S là đa tạp hai chiều, liên thông, có hướng (ta gọi S là *mặt*) và ánh xạ $\psi : S \to \mathbb{H}^3$. Ta nói ψ *chính quy tại điểm* $z_0 \in S$ nếu tại đó hạng của $d\psi$ bằng 2. Trong tham số hóa $z = s + it$ của ψ tại z_0, điều kiện chính quy tương đương với $\{\psi_s \wedge \psi_t\}_{z_0} \neq 0$. Khi ψ chính quy tại mọi $z_0 \in S$, ta nói ψ là *chính quy*.

Trường véc tơ pháp tuyến đơn vị η của ψ là ánh xạ $\eta : S \to \mathbb{S}_1^3$, thỏa mãn $\langle \psi, \eta \rangle = 0$ và $\langle d\psi, \eta \rangle = 0$, ngoài ra, η phù hợp với hướng được chọn trên S; cụ thể, trong tham số hóa $z = s + it$ (bảo toàn hướng) của S tại các điểm chính quy, ta có

$$\eta = \frac{\psi_s \wedge \psi_t}{\sqrt{\langle \psi_s \wedge \psi_t, \psi_s \wedge \psi_t \rangle}}. \tag{2.13}$$

Tại các điểm chính quy, ta có khai triển

$$\eta_z = -\Delta \psi_z + \Upsilon \psi_{\overline{z}}, \tag{2.14}$$

$$\eta_{\overline{z}} = \overline{\Upsilon} \psi_z - \Delta \psi_{\overline{z}}, \tag{2.15}$$

với Δ là hàm thực và Υ là hàm phức. Từ đó, độ cong trung bình và độ cong Gauss-Kronecker của ψ lần lượt là $H = \Delta$, $K = H^2 - |\Upsilon|^2$. Khi thực hiện phép đổi tham số bảo toàn hướng, véc tơ η và các độ cong H, K không thay đổi.

Ánh xạ Gauss `hyperbolic` của ψ là $G = [\psi + \eta] : S \to \overline{\mathbb{C}}$, cho bởi

$$G = [\psi + \eta] = \frac{N_1 - iN_2}{N_0 + N_3}, \qquad \text{với } N = \psi + \eta. \tag{2.16}$$

Ta có thể xem G là phép chiếu nổi cực nam từ biên $\mathbb{S}_\infty^2$ của $\mathbb{H}^3$ lên mặt phẳng phức (mở rộng) đi qua tâm của $\mathbb{S}_\infty^2$; nếu $N_0 + N_3 = 0$ thì $N_1 = N_2 = 0$ và khi đó giá trị của G là ∞. Chi tiết về cách xây dựng G có thể xem trong [6], [12], [15].

2.3 Mặt Riemann. Hàm (phản) phân hình

Mặt Riemann [16, 20] là đa tạp hai chiều $(X, \mathfrak{C})$, trong đó, $\mathfrak{C}$ là `atlas` gồm các bản đồ sao cho phép biến đổi tọa độ giữa hai bản đồ bất kỳ là chỉnh hình.

Theo [8, Theorem 1.4.3], trên các đa tạp Riemann hai chiều, có hướng, với `metric` σ, ta luôn chọn được `atlas` gồm các bản đồ mà đối với chúng `metric` σ là bảo giác. Như vậy, mọi đa tạp Riemann hai chiều có hướng đều có thể xem là mặt Riemann.

Một ví dụ về mặt Riemann là *mặt cầu Riemann* $\mathbb{S}^2_\infty \equiv \overline{\mathbb{C}}$ [20].

Hàm phân hình [16, Definition 9] chẳng qua là hàm chỉnh hình (theo nghĩa đa tạp) từ mặt Riemann vào $\overline{\mathbb{C}}$. Tính chất phân hình của $f : S \to \overline{\mathbb{C}}$ tương đương với điều kiện

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = f_{\overline{z}} = 0, \tag{2.17}$$

trong đó, z là tham số hóa bảo giác bảo toàn hướng của S. Tương tự, ta nói $f : S \to \overline{\mathbb{C}}$ *phản phân hình* nếu trong các tham số hóa z như vậy,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f_z = 0. \tag{2.18}$$

Khi đổi hướng trên $\overline{\mathbb{C}}$ thì hàm phản phân hình trở thành phân hình, và ngược lại. (Điều này được chứng minh dễ dàng bằng cách sử dụng biểu diễn địa phương của f.) Vì vậy, các hàm phản phân hình và phân hình có các tính chất tương tự nhau: tính duy nhất, sự thác triển, ...

2.4 Tính chất bảo giác

Cho đa tạp M trên đó có các `metric` Riemann σ_1, σ_2. Ta nói σ_1 là bảo giác với σ_2 nếu có hàm χ dương, trơn sao cho $\sigma_1 = \chi\sigma_2$. Ánh xạ chính quy $f : (M, \sigma_1) \to (N, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ giữa các đa tạp Riemann được nói là *bảo giác* nếu σ_1 bảo giác với `metric` σ_2 như sau (σ_2 là `metric` kéo từ N về M)

$$\sigma_2(u, v) := \langle u, v\rangle_M := \big\langle df(u), df(v)\big\rangle, \qquad u, v \in T_pM, \quad p \in M. \tag{2.19}$$

Bây giờ, giả sử M là đa tạp hai chiều. Xét tham số hóa $z = s + it$ tại điểm $p \in M$, sao cho z bảo giác, hay cũng vậy, sao cho $\{\partial_s, \partial_t\}$ là cơ sở trực giao của T_pM. Nếu $f : M \to (N, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ bảo giác thì trong tham số hóa z đó, ta có

$$4\langle f_z, f_z\rangle = \langle f_s, f_s\rangle - \langle f_t, f_t\rangle - 2i\,\langle f_s, f_t\rangle = 0. \tag{2.20}$$

Đây cũng là điều kiện để f bảo giác (về mặt địa phương).

Thực tế, ta thường gặp các ánh xạ $f : M \to (N, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ không chính quy tại mọi điểm của M, và thậm chí $\langle\cdot,\cdot\rangle$ chỉ là giả `metric` trên N. Khi đó, ta nói f là bảo giác nếu trong tham số hóa z bảo giác tại điểm p bất kỳ của M, ta có (2.20). Khi $(N, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ là đa tạp Riemann, nếu p là điểm chính quy của f thì trong lân cận mở đủ nhỏ của p, ánh xạ f chính quy; trong lân cận đó, tính chất bảo giác của f theo định nghĩa này trùng với tính chất bảo giác đã nói ở trên. Kể từ lúc này, ta sẽ hiểu tính chất bảo giác theo nghĩa mở rộng này.

Trong giải tích phức [1], ta biết rằng, tại các điểm chính quy của ánh xạ chỉnh hình $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, ta có f bảo toàn độ lớn của góc và bảo toàn hướng, do đó, f là bảo giác. Ngược lại, vì tính chất bảo giác của f tương đương với tính chất bảo toàn độ lớn của góc, nếu f bảo giác thì f chỉnh hình hoặc phản chỉnh hình.

Sử dụng các tham số hóa địa phương của $\overline{\mathbb{C}}$, ta chứng tỏ được rằng, nếu ánh xạ $f : S \to \overline{\mathbb{C}}$ bảo giác thì f chỉnh hình hoặc phản chỉnh hình, và ngược lại.

2.5 Các bổ đề cơ bản về mặt BLW

Định nghĩa 1 (Mặt BLW): *Mặt chính quy $\psi : S \to \mathbb{H}^3$ được gọi là* BLW *nếu có các hằng số thực a, b sao cho*

$$2a(H-1) + bK_I = 2a(H-1) + b(K-1) = 0, \tag{2.21}$$

với H là độ cong trung bình, $K_I = K - 1$ là độ cong Gauss và K là độ cong Gauss-Kronecker của ψ.

Trường hợp $a+b=0$ được xét trong bài báo [11]. Kể từ lúc này, ta luôn giả sử $a+b \neq 0$. Nếu $b = 0$, ta có $a = \pm 1$ và mặt BLW bây giờ là mặt `CMC1`; Bài toán Björling tương ứng được giải trong [15]. Nếu $a = 0$, ta được các `flat surface` được xét trong [14].

Bổ đề 1 ([12, Lemma 1]): *Cho ψ là mặt BLW thỏa mãn* (2.21)*. Khi đó, có thể coi $|a+b| = 1$, với dấu của a, b được chọn sao cho*

$$\sigma = aI + bII \tag{2.22}$$

là metric xác định dương trên S; ở đây, $I = \langle d\psi, d\psi\rangle$ và $II = \langle d\psi, -d\eta\rangle$ lần lượt là dạng cơ bản thứ nhất và thứ hai của ψ.

Cho mặt BLW $\psi : S \to \mathbb{H}^3$ thỏa mãn (2.21). Khi nói đến a, b, ta ngầm hiểu $|a+b| = 1$ và dấu của chúng đã được chọn để $\sigma = aI + bII$ trở thành `metric` xác định dương. Ta coi S là mặt Riemann với cấu trúc bảo giác cảm sinh bởi `metric` σ.

Nhận xét sau đây được tổng hợp từ phát biểu của [12, Theorem 1], từ chứng minh của định lý đó và từ [12, Remark 3].

Nhận xét 2: *Cho mặt BLW $\psi : S \to \mathbb{H}^3$ thỏa mãn (2.21). Ký hiệu η là trường véc tơ pháp tuyến đơn vị của ψ, z là tham số hóa bảo giác đối với σ và 2χ là hệ số bảo giác, tức là $\sigma = 2\chi|dz|^2$. Khi đó,*

1. *ánh xạ $\psi + \eta$ bảo giác đối với* `metric` $\sigma = aI + bII$, *và hoặc $\psi(S)$ là một phần của* `horosphere`, *hoặc $\langle d(\psi + \eta), d(\psi + \eta)\rangle$ là giả* `metric` *với độ cong hằng $c = \frac{a}{a+b}$; đặc biệt, ánh xạ Gauss* `hyperbolic` $G = [\psi + \eta]$ *là bảo giác;*

2. *$z_0 \in S$ là điểm* `singular` *của $\psi + \eta$ khi và chỉ khi $H(z_0) = K(z_0) = 1$; như vậy, mọi điểm* `singular` *của $\psi + \eta$ đều là điểm* `umbilic`*;*

3. *vi phân Hopf $Q_I = \langle \psi_z, \psi_z\rangle dz^2$ chỉnh hình, và do đó, mặt BLW sẽ hoàn toàn* `umbilic`*, hoặc các điểm* `umbilic` *của nó đều cô lập;*

4. *tại các điểm chính quy của $\psi + \eta$, ta có*

$$\psi = \frac{2a+b}{2(a+b)}(\psi + \eta) + \frac{a+b}{\chi(2H - K - 1)}(\psi + \eta)_{z\bar{z}}; \tag{2.23}$$

nếu thêm giả thiết $b \neq 0$, ta có

$$\frac{2H - K - 1}{a+b} = \frac{1}{\chi}\big\langle(\psi + \eta)_z, (\psi + \eta)_{\bar{z}}\big\rangle, \tag{2.24}$$

và do đó, với ϕ là hệ số bảo giác của $\langle d(\psi + \eta), d(\psi + \eta)\rangle$,

$$\psi = \frac{2a+b}{2(a+b)}(\psi + \eta) + \frac{2}{\phi}(\psi + \eta)_{z\bar{z}}. \tag{2.25}$$

Để ý rằng, theo [15], công thức (2.25) cũng đúng ngay cả khi $b = 0$.

2.6 Phương trình Liouville

Mục này trình bày về phương trình Liouville và bài toán Cauchy của phương trình đó. Các chứng minh chi tiết có trong [15], [17].

Cho miền phẳng $U \subset \mathbb{C}$ và hằng số thực c. *Phương trình Liouville* có dạng

$$(\ln \phi)_{z\bar{z}} = -\frac{c}{2}\phi, \tag{2.26}$$

có thể được xem như phương trình vi phân phức. Nếu $ds^2 = \phi|dz|^2$ là `metric` Riemann trên U thì ϕ thỏa mãn (2.26) khi và chỉ khi ds^2 có độ cong hằng c. (Có thể thấy được mối liên hệ này từ công thức biểu diễn độ cong K của U theo hệ số bảo giác của `metric` trên U; xem thêm trong [9].)

Khi giải Bài toán Björling ta sẽ đi đến bài toán Cauchy cho phương trình Liouville

$$\begin{cases} (\ln\phi)_{z\bar{z}} = -\dfrac{c}{2}\phi, \\ \phi(s,0) = a(s), \\ \phi_z(s,0) = b(s). \end{cases} \tag{2.27}$$

Ở đây, a là hàm giải tích thực, không âm, và $b(s)$ là hàm giải tích phức sao cho

$$2\,\mathrm{Re}\{b(s)\} = a'(s). \tag{2.28}$$

Ký hiệu $\{f, z\}$ là *đạo hàm Schwarz* như sau

$$\{f,z\} = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2, \qquad \left(' = \frac{d}{dz}\right). \tag{2.29}$$

Ta cũng có định nghĩa $\{f, s\}$ tương tự cho hàm thực f và biến thực s.

Định lý 3 ([15, Theorem 1]): *Cho $c \neq 0$ và $T(s) : I \to \mathbb{C}$ là nghiệm bất kỳ của phương trình vi phân $\{T, s\} = \Upsilon(s)$, với*

$$2\Upsilon(s) = 2\left(\frac{b(s)}{a(s)}\right)' - \left(\frac{b(s)}{a(s)}\right)^2 + c\,a(s), \tag{2.30}$$

và định nghĩa

$$\overline{R(s)} = \frac{1}{c}\,\frac{T''(s) - \{b(s)/a(s)\}T'(s)}{2T'(s)^2 - T(s)T''(s) + \{b(s)/a(s)\}T(s)T'(s)}. \tag{2.31}$$

Ký hiệu $T(z)$ và $R(z)$ lần lượt là các thác triển phân hình của $T(s)$ và $R(s)$ trên tập hợp mở $D \subset \mathbb{C}$ chứa I. Khi đó,

$$\phi(s,t) = \frac{4T_z\overline{R_z}}{(1 + cT\overline{R})^2} \tag{2.32}$$

là nghiệm duy nhất của bài toán Cauchy (2.27).

Trường hợp suy biến $c = 0$, ta có bài toán Cauchy

$$\begin{cases} \Delta(\ln \phi) = 0, \\ \phi(s,0) = a(s), \\ \phi_t(s,0) = d(s), \end{cases} \tag{2.33}$$

với $a(s), d(s) : I \to \mathbb{R}$ là các hàm giải tích thực, $a(s)$ là hàm dương.

Định lý 4 ([15, Theorem 6]): *Nghiệm duy nhất ϕ của bài toán Cauchy (2.33) được xây dựng như sau: cố định $s_0 \in I$ và xét hàm $\theta(s) : I \to \mathbb{R}$ cho bởi*

$$\theta(s) = -\frac{1}{2}\int_{s_0}^{s} \frac{d(r)}{a(r)}\, dr, \tag{2.34}$$

và các thác triển chỉnh hình $\sqrt{a}(z)$, $\theta(z)$ của $\sqrt{a}(s)$, $\theta(s)$. Khi đó, $\phi(s,t) = |f(z)|^2$, với $z = s + it$ và f là hàm chỉnh hình

$$f(z) = \sqrt{a}(z)e^{i\theta(z)}. \tag{2.35}$$

Xét bài toán Cauchy (2.27) dạng thực

$$\begin{cases} \Delta(\ln \phi) = -2c\phi, \\ \phi(s,0) = a(s), \\ \phi_t(s,0) = d(s); \end{cases} \tag{2.36}$$

ở đây, $a(s)$, $d(s)$ là các hàm giải tích thực, và $a(s)$ dương. Lời giải của (2.36) được xây dựng một cách hình học như sau đây. Ký hiệu $\mathfrak{Q}(c)$ là đa tạp Riemann hai chiều với độ cong hằng c như sau: $\mathfrak{Q}(0) = \mathbb{R}^2$ và

$$\mathfrak{Q}(c) = \begin{cases} \mathbb{S}^2(c) = \left\{(x_0,x_1,x_2) : \quad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{1}{\sqrt{c}}\right\} & \text{nếu } c > 0, \\ \mathbb{H}^2(c) = \left\{(x_0,x_1,x_2) : -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{-1}{\sqrt{-c}},\ x_0 > 0\right\} & \text{nếu } c < 0. \end{cases} \tag{2.37}$$

Xét phép *chiếu nổi* π của $\mathfrak{Q}(c)$ lên $\overline{\mathbb{C}}$, cho bởi

$$\pi(x_0,x_1,x_2) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - cx_0}. \tag{2.38}$$

Định lý 5 ([15, Theorem 3]): *Nghiệm duy nhất của bài toán Cauchy* (2.36) *là*

$$\phi(s,t) = \frac{4|g'(z)|^2}{(1+c|g(z)|^2)^2}, \qquad z = s + it, \tag{2.39}$$

với $g(z)$ là thác triển phân hình của $g(s) = \pi(\alpha(s))$ với $\pi : \mathfrak{Q}(c) \to \overline{\mathbb{C}}$ là phép chiếu nổi, và $\alpha(s)$ là đường cong duy nhất trong $\mathfrak{Q}(c)$ với tham số hóa độ dài cung và độ cong trắc địa lần lượt là

$$u(s) = \int^s \sqrt{a}(r)\, dr, \qquad \kappa(s) = -\frac{d(s)}{2a(s)^{3/2}}. \tag{2.40}$$

Xét *phương trình Liouville cải biên*

$$4(\ln\rho)_{z\overline{z}} = -c\rho^2|f(z)|^2, \tag{2.41}$$

với hàm f phân hình. Mối liên hệ giữa (2.26) và (2.41) như sau: nếu $\rho : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ là hàm trơn, thì ρ thỏa mãn (2.41) khi và chỉ khi $\phi = \rho^2|f|^2$ thỏa mãn (2.26).

Xét bài toán Cauchy cho phương trình (2.41):

$$\begin{cases} 4(\ln\rho)_{z\overline{z}} = -c\rho^2|f(z)|^2, \\ \rho(s,0) = v(s), \\ \rho_z(s,0) = w(s). \end{cases} \tag{2.42}$$

(Ta giả sử rằng f không có cực điểm trên $\mathbb{R}$.)

Hệ quả 6: *Nghiệm của bài toán Cauchy* (2.42) *cho phương trình Liouville cải biên* (2.41) *là $\rho = \sqrt{\phi}/|f|$, với ϕ là nghiệm của bài toán Cauchy* (2.27) *cho phương trình Liouville* (2.26) *với điều kiện ban đầu*

$$\begin{aligned} a(s) &= v(s)^2|f(s)|^2, \\ b(s) &= 2v(s)w(s)|f(s)|^2 + v(s)^2 f'(s)\overline{f(s)} \end{aligned} \tag{2.43}$$

(nghiệm ϕ được xây dựng nhờ Định lý 3 hoặc Định lý 4).

Chương 3

Bài toán Björling

Chương này là nội dung chính của luận văn. Ta sẽ phát biểu Bài toán Björling cho mặt BLW (Mục 3.1), chứng minh Định lý 7 (về nghiệm của Bài toán Björling) và Định lý 8 (về tính phân hình của ánh xạ Gauss `hyperbolic`).

Để tiện lợi cho việc theo dõi, chứng minh của Định lý 7 này được chia thành từng mục. Trường hợp đầu tiên ($a + b = 1$) được trình bày trong Mục 3.2 và Mục 3.3. Trường hợp còn lại, do sự tương tự, được trình bày sơ lược trong Mục 3.4.

Những chú thích trong Mục 3.5 rất quan trọng, là phần không thể thiếu trong chứng minh của Định lý 7. Trong mục này, ta cũng sẽ chứng minh Định lý 8.

Trước hết, ta cần khái niệm sau về *đường cong giải tích*.

Định nghĩa 2: *Đường cong $\beta : I \to S$ trên mặt Riemann S được nói là* giải tích *tại $s_0 \in I$ nếu trong tham số hóa bảo giác (U, z) của S tại $\beta(s_0)$, đường cong $z \circ \beta : J \to z(U) \subset C$ giải tích tại s_0 (với J là lân cận nào đó của s_0). Khi β giải tích tại mọi điểm $s \in I$, ta nói β* giải tích.

Ta có định nghĩa tương tự cho khái niệm *chính quy.*

3.1 Bài toán Björling

Bài toán Björling cho mặt BLW được phát biểu như sau đây.

> *Cho các hằng số thực a, b, với $|a + b| = 1$, đường cong giải tích, chính quy $\beta : I \to \mathbb{H}^3$ và trường véc tơ giải tích $V : I \to \mathbb{S}^3_1$ dọc β, sao cho với mọi $s \in I$*

$$\begin{aligned} &\big\langle \beta(s), V(s) \big\rangle = \big\langle \beta'(s), V(s) \big\rangle = 0, \\ &\big\langle \beta'(s), a\beta'(s) - bV'(s) \big\rangle > 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Tìm mặt BLW $\psi : S \to \mathbb{H}^3$ thỏa mãn (2.21), sao cho tồn tại đường cong giải tích, chính quy $\Gamma \subset S$, với $\psi(\Gamma) = \beta$, và V là trường véc tơ pháp tuyến đơn vị của ψ dọc β. Ta gọi mỗi mặt BLW tìm được là nghiệm của Bài toán Björling *với* điều kiện ban đầu (β, V).

Kết quả của toàn chương thể hiện trong hai định lý sau.

Định lý 7: *Cho điều kiện ban đầu (β, V) như trong phát biểu của Bài toán Björling. Giả sử $v = \beta + V$ thỏa mãn $v_0(s) + v_3(s) \neq 0$ với mọi $s \in I$, và ánh xạ $G : I \to \mathbb{C}$*

$$G = \frac{v_1 - iv_2}{v_0 + v_3} : I \to \mathbb{C} \tag{3.2}$$

có đạo hàm không triệt tiêu tại điểm nào của I. Khi đó, Bài toán Björling với điều kiện ban đầu (β, V) có duy nhất nghiệm; nghiệm $\psi : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{H}^3$ được xây dựng trong lân cận của β như sau:

1. *nếu $a + b = 1$, ký hiệu $\beta(z)$ và $V(z)$ lần lượt là thác triển chỉnh hình của $\beta(s)$, $V(s)$; đặt $v(z) = \beta(z) + V(z)$ và*

$$G(z) = \frac{v_1(z) - iv_2(z)}{v_0(z) + v_3(z)}; \tag{3.3}$$

gọi $\rho : D \to [0; +\infty)$ là nghiệm duy nhất của bài toán Cauchy

$$\begin{cases} 4\big(\ln \rho\big)_{z\overline{z}} = -\dfrac{a}{a+b}\,\rho^2 |G_z|^2, \\ \rho(s,0) = v_0(s) + v_3(s), \\ \rho_z(s,0) = \dfrac{1}{2}\Big\{v_0' + v_3' + i\,\big[(V \wedge v')_0 + (V \wedge v')_3\big]\Big\}; \end{cases} \tag{3.4}$$

khi đó, $\psi = F\Omega F^* : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{H}^3$ với

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ G & 1 \end{bmatrix}; \qquad \Omega = \begin{bmatrix} \dfrac{2a+b}{2(a+b)}\,\rho + \dfrac{2\rho_{z\overline{z}}}{\rho^2 |G_z|^2} & \dfrac{2\rho_z}{\rho^2 G_z} \\ \dfrac{2\rho_{\overline{z}}}{\rho^2 \overline{G_z}} & \dfrac{2}{\rho} \end{bmatrix}; \tag{3.5}$$

2. *nếu $a + b = -1$, ký hiệu $\beta(z)$ và $V(z)$ lần lượt là thác triển phản chỉnh hình của $\beta(s)$ và $V(s)$; đặt $v(z) = \beta(z) + V(z)$ và $G(z)$ như (3.3); gọi $\rho : D \to [0; +\infty)$ là*

nghiệm duy nhất của bài toán Cauchy

$$\begin{cases} 4\big(\ln\rho\big)_{z\overline{z}} = -\dfrac{a}{a+b}\,\rho^2|\overline{G}_z|^2, \\ \quad \rho(s,0) = v_0(s) + v_3(s), \\ \quad \rho_z(s,0) = \dfrac{1}{2}\Big\{v_0' + v_3' - i\,\big[(V\wedge v')_0 + (V\wedge v')_3\big]\Big\}; \end{cases} \tag{3.6}$$

khi đó, $\psi = F\Omega F^* : D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{H}^3$ *với*

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ G & 1 \end{bmatrix}; \qquad \Omega = \begin{bmatrix} \dfrac{2a+b}{2(a+b)}\,\rho + \dfrac{2\rho_{z\overline{z}}}{\rho^2|\overline{G}_z|^2} & \dfrac{2\rho_{\overline{z}}}{\rho^2 G_{\overline{z}}} \\ \dfrac{2\rho_z}{\rho^2\overline{G}_z} & \dfrac{2}{\rho} \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Trong cả hai trường hợp, G là ánh xạ Gauss `hyperbolic` *của ψ; nghiệm của* (3.4), (3.6) *được xây dựng theo Mục 2.6.*

Trong phát biểu của Định lý 7, ta giả thiết $v = \beta + V$ và G ở (3.2) thỏa mãn $v_0(s) + v_3(s) \neq 0$ và $G'(s) \neq 0$ với mọi $s \in I$. Điều kiện thứ nhất thể bỏ qua; điều kiện còn lại nhằm hạn chế các kỳ dị. Ở Mục 3.5.1 ta sẽ nói rõ hơn về điều này.

Theo [6], ánh xạ Gauss `hyperbolic` của mặt chính quy $\psi : S \to \mathbb{H}^3$ là phân hình khi (và chỉ khi) ψ là mặt `CMC1`. Tổng quát hơn kết quả này, ta có

Định lý 8: *Cho mặt BLW $\psi : S \to \mathbb{H}^3$ thỏa mãn (2.21) và $\psi(S)$ không phải là một phần của* `horosphere`*. Khi đó, ánh xạ Gauss* `hyperbolic` *G của ψ phân hình khi $a+b>0$, phản phân hình khi $a+b<0$.*

Phần còn lại của chương này dành cho việc chứng minh Định lý 7 và Định lý 8. Kể từ lúc này cho tới trước Mục 3.4, ta luôn giả sử rằng $a+b=1$.

3.2 Sự duy nhất của nghiệm

Giả sử tồn tại mặt BLW $\psi : S \to \mathbb{H}^3$ thỏa mãn các yêu cầu của bài toán. Khi đó, S trở thành mặt Riemann với cấu trúc bảo giác cảm sinh bởi `metric` $\sigma = aI + bII$. Ta chứng minh rằng, về mặt địa phương, ψ được xác định hoàn toàn theo điều kiện ban đầu (β, V), và có thể biểu diễn bằng một biểu thức của điều kiện đó. Từ tính liên tục giải tích [5] của mặt BLW, ta suy ra tính duy nhất của nghiệm.

3.2.1 Tham số hóa của nghiệm

Chọn tham số hóa bảo giác (U, z), với U mở trong S và U chứa đoạn J của Γ. Về địa phương, mặt BLW có thể biểu diễn bởi $\chi : z(U) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{H}^3$. Ta có

$$\chi\big(\Gamma(s)\big) = \beta(s), \quad \eta\big(\Gamma(s)\big) = V(s), \qquad s \in J, \tag{3.8}$$

với $\eta : S \to \mathbb{S}^3_1$ là véc tơ pháp tuyến đơn vị của ψ.

Đặt $\gamma = z \circ \Gamma : J \to z(U)$ thì γ giải tích theo nghĩa thông thường. Do đó, γ có thác triển chỉnh hình $\gamma(w) : W \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, với W là tập hợp mở, chứa đoạn J như là một phần của trục thực. Cố định điểm $s_0 \in J$. Vì γ chính quy tại s_0 nên theo định lý hàm ngược, tồn tại ánh xạ song chỉnh hình $\gamma : D \subset W \subset \mathbb{C} \to B \subset z(U) \subset \mathbb{C}$, với D là tập hợp con mở của W, chứa lân cận $(s_0 - \delta; s_0 + \delta)$, và B là tập hợp con mở của $z(U)$.

Như vậy, mặt BLW của ta bây giờ có thể biểu diễn bởi

$$\psi : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{H}^3, \qquad \psi(w) = \chi\big(\gamma(w)\big), \tag{3.9}$$

và với mọi $s \in J := (s_0 - \delta; s_0 + \delta) \subset I$ ta có

$$\begin{aligned} \psi(s, 0) &= \chi\big(\gamma(s)\big) = \beta(s), \\ \eta(s, 0) &= \eta\big(\gamma(s)\big) = V(s). \end{aligned} \tag{3.10}$$

(Ta lạm dụng ký hiệu ψ để chỉ mặt BLW đồng thời chỉ một tham số hóa của mặt đó.) Do tính song chỉnh hình của $\gamma : D \to B$ nên tham số hóa (D, ψ) bảo giác.

3.2.2 Mối liên hệ với phương trình Liouville cải biên

Ký hiệu $v = \beta + V : I \to \mathbb{N}^3_+$ và G là ánh xạ Gauss `hyperbolic` của mặt BLW. Ta có

$$G(s) = \frac{v_1(s) - i\, v_2(s)}{v_0(s) + v_3(s)}, \qquad s \in I. \tag{3.11}$$

Ký hiệu U là tập hợp con mở của D, chứa J, sao cho trên đó $\beta(s)$ và $V(s)$ có thác triển chỉnh hình $\beta(z)$, $V(z)$. Vì G phân hình (như chú thích ở Mục 3.5.2), nên theo định lý về tính duy nhất, trên D ta có

$$G(z) = \frac{v_1(z) - i\, v_2(z)}{v_0(z) + v_3(z)}. \tag{3.12}$$

Hàm G như vậy sẽ được thác triển phân hình một cách duy nhất lên toàn bộ D.

Ta biểu diễn

$$\psi + \eta = \rho \begin{bmatrix} 1 & \overline{G} \\ G & G\overline{G} \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

với $\rho = N_0 + N_3 : D \to [0; +\infty)$ là hàm trơn và $N = \psi + \eta$. Vì ψ là mặt BLW và do giả thiết G' không triệt tiêu dọc theo β, ta có $\tau = \big\langle d(\psi + \eta), d(\psi + \eta) \big\rangle$ là giả `metric` với độ cong hằng $c = \frac{a}{a+b}$. Từ (3.13) ta có

$$\big\langle (\psi + \eta)_z, (\psi + \eta)_{\overline{z}} \big\rangle = \frac{1}{2}\, \rho^2 |G_z|^2; \tag{3.14}$$

do đó, hệ số bảo giác $\phi = \rho^2 |G_z|^2$ của τ thỏa mãn phương trình Liouville (2.26). Do G_z phân hình, ta suy ra $\rho : D \to [0; +\infty)$ thỏa mãn phương trình Liouville cải biên

$$4\big(\ln \rho\big)_{z\overline{z}} = -c\, \rho^2 |G_z|^2. \tag{3.15}$$

3.2.3 Điều kiện ban đầu của phương trình Liouville cải biên

Ta tìm điều kiện ban đầu cho (3.15). Trước hết, từ định nghĩa của ρ,

$$\rho(s, 0) = v_0(s) + v_3(s), \qquad s \in J. \tag{3.16}$$

Ta còn phải tìm $\rho_z(s, 0)$ với $s \in J$. Theo (2.14) và (2.15),

$$\eta_z = -H\psi_z + \Upsilon \psi_{\overline{z}}; \qquad \eta_{\overline{z}} = \overline{\Upsilon}\psi_z - H\psi_{\overline{z}}, \tag{3.17}$$

với H và $K = H^2 - |\Upsilon|^2$ lần lượt là độ cong trung bình và độ cong Gauss-Kronecker của ψ. Từ đây, tính toán trực tiếp, ta có

$$(\psi + \eta)_z \wedge (\psi + \eta)_{\overline{z}} = -(2H - K - 1)\, \psi_z \wedge \psi_{\overline{z}} \tag{3.18}$$

hay

$$(\psi + \eta)_s \wedge (\psi + \eta)_t = -(2H - K - 1)\, \psi_s \wedge \psi_t. \tag{3.19}$$

Khi $b \neq 0$, theo (2.24), tại các điểm chính quy của $\psi + \eta$, ta có

$$\operatorname{sgn}(2H - K - 1) = \operatorname{sgn}(a + b). \tag{3.20}$$

Vì $\psi + \eta$ bảo giác, hai véc tơ $(\psi + \eta)_s$ và $(\psi + \eta)_t$ vuông góc nhau và có cùng độ dài. Do đó, sử dụng (2.12), (3.19) và (3.20), ta có

$$(\psi + \eta)_t = -\operatorname{sgn}(a + b)\, \eta \wedge (\psi + \eta)_s. \tag{3.21}$$

Khi $b = 0$, theo [6], [15], (3.21) vẫn còn đúng. Vậy tại các điểm chính quy của $\psi + \eta$,

$$(\psi + \eta)_z = \frac{1}{2}\big\{(\psi + \eta)_s + i\ \mathrm{sgn}(a + b)\,\eta \wedge (\psi + \eta)_s\big\}; \tag{3.22}$$

đặc biệt, dọc theo β,

$$(\psi + \eta)_z(s, 0) = \frac{1}{2}\big\{v' + i\ \mathrm{sgn}(a + b)\,V \wedge v'\big\}. \tag{3.23}$$

Suy ra với $s \in J$,

$$\rho_z(s, 0) = \frac{1}{2}\Big\{v_0' + v_3' + i\ \mathrm{sgn}(a + b)\,\big[(V \wedge v')_0 + (V \wedge v')_3)\big]\Big\}. \tag{3.24}$$

Từ (3.15), (3.16), (3.24), ta thấy ρ thỏa mãn bài toán Cauchy (3.4). (Chú ý rằng, điều kiện ban đầu của hệ (3.4) chỉ có dọc dọc theo β, cụ thể là khi $s \in J$. Để khắc phục điều này, ta có thể thu nhỏ tập hợp D khi cần thiết.) Như vậy, ρ được xác định duy nhất theo điều kiện ban đầu (β, V).

3.2.4 Phục hồi ψ từ điều kiện ban đầu

Bây giờ, ta tìm biểu thức phục hồi ρ theo ρ, β và V.

Xét đường cong phân hình $F : D \subset \mathbb{C} \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ cho bởi

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ G & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.25}$$

Khi đó, biểu diễn (3.13) có thể ghi lại như sau:

$$\psi + \eta = F \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} F^*. \tag{3.26}$$

Khi đó,

$$(\psi + \eta)_{\overline{z}} = F \begin{bmatrix} \rho_{\overline{z}} & \rho\overline{G_z} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} F^*, \qquad (\psi + \eta)_{z\overline{z}} = F \begin{bmatrix} \rho_{z\overline{z}} & \rho_z\overline{G_z} \\ \rho_{\overline{z}}G_z & \rho|G_z|^2 \end{bmatrix} F^*. \tag{3.27}$$

Vậy, theo (2.25), tại các điểm chính quy của $\psi + \eta$, ta có

$$\psi = \frac{2a + b}{2(a + b)}(\psi + \eta) + \frac{2}{\rho^2|G_z|^2}(\psi + \eta)_{z\overline{z}} = F\Omega F^* \tag{3.28}$$

với $\Omega : D \subset \mathbb{C} \to \mathrm{Herm}(2)$ cho bởi (3.5). Để ý rằng, $\det(\Omega) = 1$ do ρ thỏa mãn (3.4).

3.3 Sự tồn tại nghiệm

Cho điều kiện ban đầu (β, V) thỏa mãn các điều kiện trong Định lý 7, với $a + b = 1$. Ta chứng minh Bài toán Björling có nghiệm thỏa mãn (2.21).

3.3.1 Xây dựng nghiệm

Đặt $v = \beta + V : I \to \mathbb{N}^3_+$. Định nghĩa đường cong $G : I \to \mathbb{C}$ bởi

$$G(s) = \frac{v_1(s) - iv_2(s)}{v_0(s) + v_3(s)}. \tag{3.29}$$

Ký hiệu D là tập hợp con mở của $\mathbb{C}$, chứa I như là trục thực, trên đó, $\beta(s)$ và $V(s)$ có thác triển chỉnh hình $\beta(z)$, $V(z)$. Khi đó, ta có thác triển phân hình $G(z) : D \to \overline{\mathbb{C}}$

$$G(z) = \frac{v_1(z) - iv_2(z)}{v_0(z) + v_3(z)}. \tag{3.30}$$

Giả sử $\rho : D \subset \mathbb{C} \to [0; +\infty)$ là nghiệm duy nhất của hệ (3.4).

Xét $U = D \setminus P$ là tập hợp con mở của D, trong đó, P là tập hợp con đóng của D gồm các không điểm của ρ, các không điểm và cực điểm của G_z. (Rõ ràng, U chứa toàn bộ I.) Trên U, đặt $\psi = F\Omega F^* : U \to \mathbb{H}^3$, với F, Ω được cho ở (3.5); và

$$N = F \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} F^*. \tag{3.31}$$

Ta lần lượt chứng minh rằng

1. `metric` $\sigma = aI + bII$ xác định dương (Mục 3.3.2);

2. ψ chính quy (Mục 3.3.3);

3. $\eta = N - \psi$ là véc tơ pháp tuyến đơn vị của ψ (Mục 3.3.4);

4. ψ là mặt BLW (Mục 3.3.5);

5. ψ là nghiệm của Bài toán Björling với điều kiện ban đầu (β, V) (Mục 3.3.6).

Ta sẽ cần các tính toán sau đây. Đặt $U = AG_z + \overline{B}_z$, với A, B, C được cho bởi

$$\Omega = \begin{bmatrix} A & B \\ \overline{B} & C \end{bmatrix}. \tag{3.32}$$

Vì ρ thỏa mãn hệ (3.4), ta tính được

$$U = \frac{b}{2(a+b)}\,\rho G_z. \tag{3.33}$$

Sử dụng đẳng thức

$$F_z = F \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ G_z & 0 \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

ta tính được

$$d\psi = F \begin{bmatrix} dA & A\overline{G_z}\,d\overline{z} + dB \\ AG_z\,dz + d\overline{B} & dC + BG_z\,dz + \overline{BG_z}\,d\overline{z} \end{bmatrix} F^*. \tag{3.35}$$

Ta có

$$\begin{aligned} BG_z\,dz + \overline{BG_z}\,d\overline{z} &= \frac{2\rho_z}{\rho^2 G_z} G_z\,dz + \frac{2\rho_{\overline{z}}}{\rho^2 \overline{G_z}}\overline{G_z}\,d\overline{z} \\ &= \frac{2}{\rho^2}(\rho_z dz + \rho_{\overline{z}} d\overline{z}) = \frac{2}{\rho^2} d\rho = -dC. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Bởi vậy, từ (3.35) ta có

$$\begin{aligned} \langle d\psi, d\psi \rangle &= -\det(d\psi) = (A\overline{G_z}\,d\overline{z} + dB)(AG_z\,dz + d\overline{B}) \\ &= UB_z\,dz^2 + \overline{UB_z}\,d\overline{z}^2 + \left\{|B_z|^2 + |U|^2\right\}|dz|^2. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Từ định nghĩa (3.31) của $N = \psi + \eta$ ta có

$$dN = F \begin{bmatrix} d\rho & \rho\overline{G_z}d\overline{z} \\ \rho G_z dz & 0 \end{bmatrix} F^* \tag{3.38}$$

và từ đây suy ra

$$\langle dN, dN \rangle = -\det(dN) = \rho^2 |G_z|^2 |dz|^2. \tag{3.39}$$

Từ $\eta = N - \psi = (\psi + \eta) - \psi$ ta có

$$d\eta = F \begin{bmatrix} \star & (\rho - A)\overline{G_z}d\overline{z} - dB \\ (\rho - A)G_z dz - d\overline{B} & 0 \end{bmatrix} F^*, \tag{3.40}$$

Để tính $\langle d\eta, d\eta \rangle$, trong biểu thức (3.37) của $\langle d\psi, d\psi \rangle$ ta chỉ việc thay U bởi

$$U_* := (A - \rho)G_z + \overline{B}_z = U - \rho G_z. \tag{3.41}$$

3.3.2 Metric σ là bảo giác

Bây giờ ta đi tính $\sigma = a\langle d\psi, d\psi\rangle + b\langle d\psi, -d\eta\rangle$. Ta có

$$\sigma = \left(a + \frac{b}{2}\right) \langle d\psi, d\psi\rangle + \frac{b}{2} \langle d\eta, d\eta\rangle - \frac{b}{2} \langle dN, dN\rangle. \tag{3.42}$$

Sử dụng (3.37), (3.39) và ghi chú về cách tính $\langle d\eta, d\eta\rangle$ ở cuối Mục 3.3.1, ta tính được hệ số của dz^2 trong σ là

$$\left(a + \frac{b}{2}\right) UB_z + \frac{b}{2}(U - \rho G_z)B_z = \frac{1}{2}\big\{2(a+b)U - b\rho G_z\big\}B_z = 0. \tag{3.43}$$

Hoàn toàn tương tự, hệ số của $d\overline{z}^2$ trong σ bằng 0. Như vậy, σ "bảo giác" với hệ số

$$\begin{aligned}&\left(a + \frac{b}{2}\right) \left\{|B_z|^2 + |U|^2\right\} + \frac{b}{2}\big\{|B_z|^2 + |U - \rho G_z|^2\big\} - \frac{b}{2}\rho^2 |G_z|^2 \\ &= (a+b)\left\{|B_z|^2 + |U|^2\right\} - \frac{b}{2}\left(U\,\rho\overline{G_z} + \overline{U}\,\rho G_z\right) = (a+b)\big\{|B_z|^2 - |U|^2\big\}.\end{aligned} \tag{3.44}$$

Sử dụng tính chất "bảo giác" của σ và khai triển tương tự (3.89), ta tìm được hệ số bảo giác của σ dọc theo β là

$$2\chi(s, 0) = 2\big\langle \beta'(s), a\beta'(s) - bV'(s)\big\rangle > 0, \qquad \forall s \in I. \tag{3.45}$$

Vậy σ xác định dương (và do đó, thật sự bảo giác) trong lân cận của β.

3.3.3 ψ chính quy

Ta chứng minh rằng ψ chính quy. Từ (3.35), ta có

$$\psi_z = F \begin{bmatrix} \star & B_z \\ U & 0 \end{bmatrix} F^*; \qquad \psi_{\overline{z}} = F \begin{bmatrix} \star & \overline{U} \\ \overline{B_z} & 0 \end{bmatrix} F^*. \tag{3.46}$$

Từ đây ta có

$$\langle \psi_z, \psi_z\rangle = UB_z, \qquad \langle \psi_{\overline{z}}, \psi_{\overline{z}}\rangle = \overline{UB_z}, \tag{3.47}$$

$$\langle \psi_z + \psi_{\overline{z}}, \psi_z + \psi_{\overline{z}}\rangle = |\overline{U} + B_z|^2; \tag{3.48}$$

suy ra

$$2\langle \psi_z, \psi_{\overline{z}}\rangle = \langle \psi_z + \psi_{\overline{z}}, \psi_z + \psi_{\overline{z}}\rangle - \langle \psi_z, \psi_z\rangle - \langle \psi_{\overline{z}}, \psi_{\overline{z}}\rangle = |U|^2 + |B_z|^2, \tag{3.49}$$

và từ đó ta có

$$\begin{aligned}\langle\psi_s\wedge\psi_t,\psi_s\wedge\psi_t\rangle &= \langle\psi_s,\psi_s\rangle\langle\psi_t,\psi_t\rangle-\langle\psi_t,\psi_t\rangle^2\\ &= 4\langle\psi_z,\psi_{\overline{z}}\rangle^2-4\langle\psi_z,\psi_z\rangle\langle\psi_{\overline{z}},\psi_{\overline{z}}\rangle\\ &= |B_z|^2-|U|^2.\end{aligned} \tag{3.50}$$

Từ (3.44), (3.45) và (3.50) ta có điều phải chứng minh.

3.3.4 η là véc tơ pháp tuyến đơn vị

Trước hết, sử dụng $\det(\Omega)=1$, $\rho C=2$ và

$$\eta = F\begin{bmatrix}\rho-A & -B\\ -\overline{B} & -C\end{bmatrix}F^* \tag{3.51}$$

ta có

$$\langle\eta,\eta\rangle=-\det(\eta)=\rho C-\left\{AC-|B|^2\right\}=1, \tag{3.52}$$

tức η nhận giá trị trong $\mathbb{S}^3_1$.

Tiếp theo, ta có

$$\begin{aligned}2\langle\psi,\eta\rangle &= \langle\psi+\eta,\psi+\eta\rangle-\langle\psi,\psi\rangle-\langle\eta,\eta\rangle\\ &= -\det(N)+\det(\psi)+\det(\eta)=0,\end{aligned} \tag{3.53}$$

nghĩa là η trực giao với ψ.

Từ (3.31), (3.35), ta có thể biểu diễn $d\psi=F\Delta_1F^*$ và $d\psi+N=F\Delta_2F^*$, trong đó, các ma trận Δ_1, Δ_2 chỉ khác nhau ở phần tử (1,1), còn phần tử (2,2) của chúng cùng triệt tiêu. Bởi vậy,

$$\langle d\psi+N,d\psi+N\rangle=-\det(d\psi+N)=-\det(d\psi)=\langle d\psi,d\psi\rangle, \tag{3.54}$$

và do đó,

$$2\langle d\psi,N\rangle=\langle d\psi+N,d\psi+N\rangle-\langle d\psi,d\psi\rangle-\langle N,N\rangle=\det(N)=0. \tag{3.55}$$

Do $\langle\psi,\psi\rangle=1$, nên $\langle d\psi,\psi\rangle=0$. Thay $N=\psi+\eta$ vào (3.55) ta có $\langle d\psi,\eta\rangle=0$.

Ta còn phải chứng minh rằng η cùng chiều với $\psi_s\wedge\psi_t$. Sử dụng các thủ tục tính toán trong Phục lục B.2, ta tìm được

$$\langle \psi_z \wedge \psi_{\overline{z}}, \eta\rangle = i\,\frac{4(a+b)^2|B_z|^2 - b^2\rho^2|G_z|^2}{8(a+b)^2} = \frac{i}{2}\big\{|B_z|^2 - |U|^2\big\}. \tag{3.56}$$

Vì $\psi_s \wedge \psi_t = -2i\,\psi_z \wedge \psi_{\overline{z}}$ nên (3.56) cho ta

$$\langle \psi_s \wedge \psi_t, \eta\rangle = |B_z|^2 - |U|^2. \tag{3.57}$$

Do $a+b=1$ nên từ tính dương của σ, (3.44) và (3.57) ta suy ra $\langle \psi_s \wedge \psi_t, \eta\rangle > 0$. Vậy η là pháp véc tơ đơn vị của ψ.

3.3.5 ψ là mặt BLW

Để chứng minh ψ là mặt BLW, thỏa mãn (2.21), ta đi tính trực tiếp độ cong trung bình H và độ cong Gauss-Kronecker K của ψ.

Từ (2.14), để ý đến (3.40) và (3.46), ta có hệ

$$\begin{cases} -HB_z + \Upsilon\overline{U} = -B_z, \\ -HU + \Upsilon\overline{B}_z = \rho G_z - U. \end{cases} \tag{3.58}$$

Định thức của hệ (3.58) là $D = -|B_z|^2 + |U|^2 \neq 0$ như đã nói trong Mục 3.3.2. Suy ra

$$H = \Delta = \frac{-|B_z|^2 + |U|^2 - \rho G_z\overline{U}}{D} = 1 - \frac{b}{2(a+b)}\frac{\rho^2|G_z|^2}{D}, \tag{3.59}$$

$$\Upsilon = -\frac{\rho G_z B_z}{D}, \tag{3.60}$$

$$K = H^2 - |\Upsilon|^2 = 1 + \frac{a}{a+b}\frac{\rho^2|G_z|^2}{D}. \tag{3.61}$$

Rõ ràng, $2a(H-1) + b(K-1) = 0$.

3.3.6 ψ là nghiệm của Bài toán Björling

Ta chứng minh ψ là nghiệm của Bài toán Björling với điều kiện ban đầu (β, V), hay cũng vậy, chỉ ra rằng

$$\psi(s,0) = \beta(s), \qquad \eta(s,0) = V(s), \qquad \forall s \in I. \tag{3.62}$$

Để ý rằng, từ điều kiện ban đầu $\rho(s,0) = v_0(s) + v_3(s)$ trong (3.4), định nghĩa của

$G(s)$ ở (3.29) và định nghĩa của N ở (3.31), ta có

$$(\psi+\eta)(s,0)=\beta(s)+V(s), \qquad \forall s\in I. \tag{3.63}$$

Như vậy, nếu chứng minh được $\psi(s,0)=\beta(s)$ thì ta sẽ có ngay $\eta(s,0)=V(s)$.

Trước hết, bằng tính toán trực tiếp, ta thấy rằng điều kiện ban đầu (β,V) thỏa mãn

$$(v_0+v_3)^2\,G'\left\{\beta_1+i\beta_2-\overline{G}(\beta_0+\beta_3)\right\}=v_0'+v_3'+i\big\{(V\wedge v')_0+(V\wedge v')_3\big\}. \tag{3.64}$$

Kết hợp với điều kiện cuối cùng trong (3.4), ta có

$$2\rho_z(s,0)=(v_0+v_3)^2G'\big\{\beta_1+i\beta_2-\overline{G}(\beta_0+\beta_3)\big\}. \tag{3.65}$$

Biểu diễn Ω như ở (3.32) thì

$$B(s,0)=\beta_1+i\beta_2-\overline{G}(\beta_0+\beta_3). \tag{3.66}$$

Do $\det(\Omega)=1$ và $\rho C=2$ ta có

$$2A(s,0)=(v_0+v_3)\Big\{1+\big|\beta_1+i\beta_2-\overline{G}(\beta_0+\beta_3)\big|^2\Big\}. \tag{3.67}$$

Tính toán trực tiếp, ta được

$$2A(s,0)=2(\beta_0+\beta_3). \tag{3.68}$$

Như vậy, $A(s,0)=\beta_0+\beta_3$ và

$$B(s,0)+A(s,0)\overline{G(s)}=\beta_1+i\beta_2. \tag{3.69}$$

Bây giờ, ta có

$$\psi=F\Omega F^*=\begin{bmatrix} A & A\overline{G}+B\\ AG+\overline{B} & \bigstar\end{bmatrix}. \tag{3.70}$$

Dọc theo β thì

$$\psi(s,0)=\begin{bmatrix} \beta_0+\beta_3 & \beta_1+i\beta_2\\ \beta_1-i\beta_2 & \bigstar\end{bmatrix}. \tag{3.71}$$

Suy ra

$$\det\{\psi(s,0)\}=1=\bigstar\,(\beta_0+\beta_3)-(-1+\beta_0^2-\beta_3^2). \tag{3.72}$$

Do $\langle\beta,\beta\rangle=-\beta_0^2+\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=-1$ nên $\beta_0+\beta_3\neq 0$. Vậy (3.72) cho ta $\bigstar=\beta_0-\beta_3$. Thay vào (3.70) ta có $\psi(s,0)=\beta(s)$ với mọi $s\in I$.

3.4 Trường hợp $a + b = -1$

Khác biệt so với trường hợp $a + b = 1$, ở đây, ta sẽ dùng thác triển phản phân hình của $G(s)$ thay cho thác triển phân hình. Xem chú thích ở Mục 3.5.2 về lựa chọn này.

Do sự tương tự so với trường hợp $a + b = -1$, ta chỉ trình bày ở đây những ý chính của việc chứng minh tính duy nhất và sự tồn tại nghiệm của Bài toán Björling.

3.4.1 Sự duy nhất của nghiệm

Cũng với biểu diễn (3.13), với điều kiện G phản phân hình, ta có

$$\big\langle (\psi + \eta)_z, (\psi + \eta)_{\overline{z}} \big\rangle = \frac{1}{2}\,\rho^2 |\overline{G}_z|^2, \tag{3.73}$$

và như vậy, $\phi = \rho^2|\overline{G}_z|^2$ thỏa mãn (2.26), từ đó, do G phản phân hình, ta có

$$4\big(\ln \rho\big)_{z\overline{z}} = -c\,\rho^2 |\overline{G}_z|^2. \tag{3.74}$$

Lập luận tương tự Mục 3.2, ta thu được bài toán Cauchy (3.6). Khác với (3.27), ta có

$$(\psi + \eta)_{\overline{z}} = F \begin{bmatrix} \rho_{\overline{z}} & \rho G_{\overline{z}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} F^*, \qquad (\psi + \eta)_{z\overline{z}} = F \begin{bmatrix} \rho_{z\overline{z}} & \rho_{\overline{z}} \overline{G}_z \\ \rho_z G_{\overline{z}} & \rho |\overline{G}_z|^2 \end{bmatrix} F^* \tag{3.75}$$

và từ đó, $\psi = F\Omega F^*$ với $F, \Omega : D \subset \mathbb{C} \to \mathrm{Herm}(2)$ cho bởi (3.7). Ta cũng có $\det(\Omega) = 1$ do ρ thỏa mãn (3.6).

3.4.2 Sự tồn tại nghiệm

Giả sử điều kiện ban đầu (β, V) thỏa mãn

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ \big\langle \beta'(s), a\beta'(s) - bV'(s) \big\rangle > 0, \qquad \forall s \in I. \end{cases} \tag{3.76}$$

Ta đặt $G(s)$ như ở (3.29). Ký hiệu D là tập hợp con mở của $\mathbb{C}$, chứa I như là trục thực, trên đó, $\beta(s)$ và $V(s)$ có thác triển phản chỉnh hình $\beta(z)$, $V(z)$. Xét thác triển phản phân hình $G(z) : D \to \overline{\mathbb{C}}$ của $G(s)$ ở (3.29). Gọi ρ là nghiệm duy nhất của (3.6). Xét U là tập hợp D bỏ đi các không điểm của ρ, các cực điểm và không điểm của $\overline{G}_z$. Tập hợp U này mở và chứa toàn bộ I. Ta xét $\psi = F\Omega F^* : U \to \mathbb{H}^3$ và N tương tự

(3.31), với Ω cho bởi (3.7) và (3.32). Đặt $\eta = N - \psi$ và

$$U = A\overline{G}_z + B_z = \frac{b}{2(a+b)}\rho\overline{G}_z. \tag{3.77}$$

Ta lần lượt tính được

$$d\psi = F\begin{bmatrix} dA & Udz + B_{\overline{z}}d\overline{z} \\ \overline{U}d\overline{z} + \overline{B}_z dz & 0 \end{bmatrix}F^*, \tag{3.78}$$

$$dN = F\begin{bmatrix} d\rho & \rho\overline{G}_z dz \\ \rho G_{\overline{z}}d\overline{z} & 0 \end{bmatrix}F^*, \tag{3.79}$$

$$d\eta = F\begin{bmatrix} \star & (\rho\overline{G}_z - U)dz - B_{\overline{z}}d\overline{z} \\ (\rho G_{\overline{z}} - \overline{U})d\overline{z} - \overline{B}_z dz & 0 \end{bmatrix}F^*, \tag{3.80}$$

$$\langle d\psi, d\psi\rangle = U\overline{B}_z\, dz^2 + \overline{U}B_{\overline{z}}\, d\overline{z}^2 + \big\{|U|^2 + |\overline{B}_z|^2\big\}\,|dz|^2, \tag{3.81}$$

$$\sigma = a\langle d\psi, d\psi\rangle + b\langle d\psi, -d\eta\rangle = (a+b)\big\{|\overline{B}_z|^2 - |U|^2\big\}|dz|^2. \tag{3.82}$$

Như vậy, trong lân cận của β, σ là `metric` bảo giác xác định dương, ψ chính quy. Để kết luận η là véc tơ pháp tuyến đơn vị, ta sử dụng Phụ lục B.3:

$$\langle \psi_z \wedge \psi_{\overline{z}}, \eta\rangle = \frac{i}{2}\big\{|U|^2 - |\overline{B}_z|^2\big\}. \tag{3.83}$$

Do $a + b = -1$, từ (3.82) và (3.83) ta suy ra $\langle \psi_s \wedge \psi_t, \eta\rangle = |U|^2 - |\overline{B}_z|^2 > 0$. Cùng với các tính toán tương tự như Mục 3.3.4, ta kết luận η là véc tơ pháp tuyến đơn vị của ψ.

Sử dụng

$$\psi_z = F\begin{bmatrix} \star & U \\ \overline{B}_z & 0 \end{bmatrix}F^*, \qquad \psi_{\overline{z}} = F\begin{bmatrix} \star & B_{\overline{z}} \\ \overline{U} & 0 \end{bmatrix}F^*, \tag{3.84}$$

khai triển (2.14), để ý đến (3.79), ta tìm được

$$H = 1 - \frac{b}{2(a+b)}\frac{\rho^2|\overline{G}_z|^2}{D}; \qquad K = 1 + \frac{a}{a+b}\frac{\rho^2|\overline{G}_z|^2}{D}. \tag{3.85}$$

(Với $D = |U|^2 - |\overline{B}_z|^2 \neq 0$.) Vậy ψ là mặt BLW, thỏa mãn (2.21).

Cuối cùng, để kiểm tra $\psi(s,0) = \beta(s)$ với $s \in I$, ta để ý rằng, theo (3.6),

$$\rho_z(s,0) = \frac{1}{2}\Big\{v_0' + v_3' - i\left[(V \wedge v')_0 + (V \wedge v')_3\right]\Big\}; \tag{3.86}$$

do đó, theo (3.64),

$$2\rho_{\overline{z}}(s,0) = (v_0+v_3)^2\, G' \left\{\beta_1 + i\beta_2 - \overline{G}(\beta_0+\beta_3)\right\}; \tag{3.87}$$

suy ra (3.66) vẫn nghiệm đúng. Tiếp theo, ta lập luận như phần còn lại của Mục 3.3.6.

3.5 Chú thích

3.5.1 Chú thích về điều kiện ban đầu

Giả sử z là tham số hóa bảo giác đối với `metric` $\sigma = aI + bII$:

$$\sigma = \langle d\psi, dQ\rangle = 2\chi|dz|^2 \qquad (Q = a\psi - b\eta). \tag{3.88}$$

Với $z = s + it$ thì (do tính bảo giác của z)

$$2\chi = \langle \psi_z, Q_{\overline{z}}\rangle + \langle \psi_{\overline{z}}, Q_z\rangle = \langle \psi_s, Q_s\rangle + \langle \psi_t, Q_t\rangle = 2\langle \psi_s, Q_s\rangle. \tag{3.89}$$

Đặt $\beta(s) = \psi(s,0)$ và $V(s) = \eta(s,0)$. Vì $2\chi > 0$ nên với mọi $s \in J$,

$$\chi(s,0) = \big\langle \psi_s(s,0), Q_s(s,0)\big\rangle = \big\langle \beta'(s), a\beta'(s) - bV'(s)\big\rangle > 0. \tag{3.90}$$

Vì vậy, khi phát biểu Bài toán Björling, ta đã giả sử (3.90) đúng với mọi $s \in I$.

Ta đã giả sử $v_0(s) + v_3(s) \neq 0$ với mọi $s \in I$ nhằm để biểu thức (3.29) xác định. Theo [15], điều kiện này có thể bỏ qua, vì hợp G với biến đổi Möbius thích hợp trên $\overline{\mathbb{C}}$, ta có thể coi rằng $v_0(s) + v_3(s) \neq 0$ với mọi $s \in I$. Thực tế, ta xử lý trường hợp này như sau. Để ý rằng $v(s) = \beta(s) + V(s) \neq 0$. Do đó, nếu $v_0(s) + v_3(s) = 0$ thì $v_0(s) - v_3(s) \neq 0$. Trong trường hợp này, thay cho (3.13) ta có

$$N = \psi + \eta = \rho_* \begin{bmatrix} H\overline{H} & \overline{H} \\ H & 1 \end{bmatrix}, \qquad \rho_* = N_0 - N_3, \quad H = \frac{N_1 - iN_2}{N_0 - N_3}. \tag{3.91}$$

Để ý rằng, khi xảy ra $v_0(s_0) + v_3(s_0) = 0$, ta phải giả thiết thêm $H'(s_0) \neq 0$ (và do đó $H'(s) \neq 0$ tại bất kỳ điểm nào thuộc lân cận thích hợp của s_0). Các tính toán bây giờ sẽ tương tự trường hợp ban đầu. Do tính chất địa phương của Bài toán Björling, kết quả của Định lý 7 không thay đổi.

Ta cũng đã giả thiết rằng đạo hàm G' không triệt tiêu tại bất kỳ điểm nào của I. Khi $G' \equiv 0$ thì nghiệm của bài toán (nếu có) phải là một phần của `horosphere`. Điều này được suy ra từ Nhận xét 2. Khi $G' \not\equiv 0$ nhưng G' có thể triệt tiêu tại một số điểm (các điểm như vậy là cô lập do tính giải tích của G'), có thể dẫn đến một số kỳ dị trên nghiệm ψ được xây dựng theo Định lý 7. Việc khảo sát các kỳ dị như vậy là một bài toán không đơn giản khi khảo sát mặt BLW. Xem thêm ở Chương 4 (Bài toán 4 và 6).

3.5.2 Tính phân hình của ánh xạ Gauss `hyperbolic`

Ta biết rằng, theo Nhận xét 2, ánh xạ Gauss `hyperbolic` $G : S \to \overline{\mathbb{C}}$ của mặt BLW là bảo giác. Do đó, G phân hình hoặc phản phân hình.

Khi chứng minh sự duy nhất nghiệm ở Mục 3.2, ta đã mặc nhiên thừa nhận tính phân hình của G. Thực tế, điều này được suy ra từ Định lý 8 mà ta sẽ chứng minh bằng phản chứng như sau đây.

Giả sử $\psi : S \to \mathbb{H}^3$ là mặt BLW thỏa mãn (2.21) với $\sigma = aI + bII$ là `metric` xác định dương, $a + b = 1$. Vì ψ không phải là một phần của `horosphere`, nên theo Nhận xét 2 các điểm suy biến của $\psi + \eta$ (cũng là điểm `umbilic` của ψ) đều cô lập. Do đó, trong tham số hóa z, các không điểm của $G_{\overline{z}}$ đều cô lập.

Ta chứng minh G xác định bởi (2.16) phân hình. Giả sử ngược lại, G phản phân hình. Cố định (U, z) là tham số hóa bảo giác bảo toàn hướng của ψ. Biểu diễn $\psi + \eta$ như ở (3.13), với $\rho = N_0 + N_3 : U \to [0; +\infty)$ và $N = \psi + \eta$. (Hợp G với biến đổi Möbius thích hợp trên $\mathbb{S}^2_\infty$, ta có thể giả sử ρ không triệt tiêu tại điểm nào trong lân cận đang xét.) Ta tính được $\psi = F\Omega F^*$ với F cho bởi (3.25) và Ω cho bởi (3.7) và (3.32), ngoài ra (3.82) và (3.83) được thỏa mãn. Vì $a + b = 1$ nên (3.82) đưa tới $|\overline{B}_z|^2 - |U|^2 > 0$. Nhưng khi đó, $\langle \psi_s \wedge \psi_t, \eta \rangle < 0$. Vô lý vì η và $\psi_s \wedge \psi_t$ có cùng chiều.

Chương 4

Kết luận

Luận văn này đặt ra và giải quyết Bài toán Björling cho mặt BLW. Định lý 7 khẳng định Bài toán Björling có nghiệm duy nhất. Biểu thức biểu diễn nghiệm không dùng đến biểu diễn bảo giác [12], và do đó, đưa ra *biểu diễn Björling* cho các mặt BLW. Nội dung của Định lý 7 bao hàm các mặt `CMC1` [15] và `flat` chính quy [14]. Định lý 8 cho phép nhận biết tính phân hình của ánh xạ Gauss `hyperbolic` của mặt BLW dựa theo dấu của $a + b$. Ngoài ra, tác giả chứng minh được các đẳng thức (2.10), (2.11), (2.12) liên quan đến tích có hướng trong $\mathbb{L}^4$.

Vì lý do thời gian, luận văn này chưa xét đến một trong những hệ quả quan trọng của việc giải thành công Bài toán Björling, là *tính đối xứng của mặt BLW*. Mặc dù vậy, có thể nói hệ quả này được chứng minh đơn giản, hoàn toàn tương tự như trong [15], khi đã có định nghĩa hợp lý của tính đối xứng.

Dưới đây là một số bài toán có liên quan đến đề tài:

1. khảo sát mặt BLW có `topo` của hình trụ (`cylinder`);
2. khảo sát mặt BLW đầy đủ với độ cong toàn phần kép (`dual`) hữu hạn đặc biệt;
3. tìm công thức tường minh của nghiệm với điều kiện ban đầu (β, V), trong đó, β là đường cong phẳng;
4. giải Bài toán Björling khi G ở (3.2) là ánh xạ hằng; như đã nói ở Mục 3.5.1, nghiệm (nếu có) trong trường hợp này phải là một phần của `horosphere`;
5. tìm lời giải hình học của bài toán Cauchy cho phương trình Liouville; trong [15], từ sự duy nhất nghiệm của Bài toán Björling cho mặt `CMC1`, tác giả tiếp cận phương trình (2.36) (khi $c = 1$) một cách hình học; phương pháp này phục hồi ánh xạ Gauss thứ cấp (liên quan đến tính chất `rigid`) của mặt `CMC1` từ điều kiện ban đầu và mô tả nghiệm của (2.36) qua ánh xạ đó;

6. tìm nghiệm của Bài toán Björling khi chấp nhận thêm các kỳ dị, chẳng hạn khi G' hoặc $\langle \beta', a\beta' - bV' \rangle$ có thể triệt triêu tại một số điểm trên I; trong [14], tác giả giải Bài toán Björling cho các `flat front` (chỉ khác `flat surface` ở chỗ trên `flat front` có thể có kỳ dị) và từ đó phân loại được `flat front` với kỳ dị cô lập nhúng được (`embedded isolated singularities`);

7. giải Bài toán Björling khi điều kiện ban đầu (β, V) thỏa mãn

$$\langle \beta', a\beta' - bV' \rangle \equiv 0; \tag{4.1}$$

(để ý rằng, do tính giải tích của β và V, các không điểm của $\langle \beta', a\beta' - bV' \rangle$ hoặc cô lập, hoặc là bất kỳ điểm nào của I;) theo Hệ quả 10 trong [14], khi cho trước β và với V được chọn thích hợp để (4.1) xảy ra (trong đó, $a = 0$), ta xây dựng được duy nhất `flat front` Σ, sao cho β chỉ gồm các điểm suy biến của Σ;

8. giải Bài toán Björling cho các mặt `ELW` [13]; mặt `ELW` trong $\mathbb{R}^3$ có độ cong Gauss K và độ cong trung bình H thỏa mãn phương trình tương tự (2.21); (có thể nghi ngờ rằng, Bài toán Björling trong trường hợp này *dễ hơn* cho các mặt BLW; thực tế, trong [13] ta chỉ có biểu diễn `harmonic` chứ không phải là bảo giác của mặt `ELW`, và đó chính là trở ngại lớn nhất;)

9. theo [6], [15], ánh xạ Gauss `hyperbolic` của mặt chính quy $\psi : S \to \mathbb{H}^3$ là phân hình khi và chỉ khi ψ là mặt `CMC1`; một phần của kết quả này được tổng quát hóa trong Định lý 8; vậy ngược lại, khi $\sigma = aI + bII$ là `metric` xác định dương và G phân hình (hoặc phản phân hình), liệu ta có suy ra được ψ là mặt BLW?

Ngoài ra, còn có Bài toán Björling cho mặt `maximal` trong $\mathbb{L}^n$. Những tính toán của Phó Giáo sư Đoàn Thế Hiếu dựa trên [3], [4] cho thấy bài toán này có thể giải được bằng việc lấy tích phân của các hàm không có chu kỳ thực.

Tài liệu tham khảo

1. Ahlfors, L. V. (1979), *Complex Analysis*, ISBN 0-07-000657-1, chap. 2, sec. 3.
2. Aledo, J. A., R. M. B Chaves and J. A. Gálvez, *The Cauchy problem for Improper Affine Spheres and the Hessian One Equation*, preprint.
3. Alías, L. J., R. M. B. Chaves and P. Mira (2003), "Björling problem for maximal surfaces in Lorentz-Minkowski space", *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **134**, 289–316.
4. Alías, L. J., and P. Mira (2002), "A Schwarz-type formula for minimal surfaces in Euclidean space $\mathbb{R}^n$", *C. R. Acad. Sci. Paris* **Ser. I 334**, 389–394.
5. *Analytic Continuation*, address: `http://en.wikipedia.org/wiki/Analytic_continuation`.
6. Bryant, R. L. (1987), "Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space", *Astérisque* **154–155**, 321–347.
7. Carmo, Manfredo P. do (1993), *Riemannian Geometry*, Translated by Francis Flaherty, Boston, Base, Berlin, ISBN 0-8176-3490-8, chap. 8.
8. Fujimori, S., S. Kobayashi and W. Rossman, *Loop Group Methods for Constant Mean Curvature Surfaces*, chap. 1, address: `http://arXiv.org/math.DG/0602570`.
9. Fujimori, S. (2006), "Spacelike Mean Curvature One Surfaces in de Sitter 3-Space", PhD thesis, Kobe University, chap. A.
10. Fung, Kai-Wing, (2004), *Minimal Surfaces as Isotropic Curves in $\mathbb{C}^3$: Associated minimal surfaces and the Björling problem*, address: `http://ocw.mit.edu/NR/rdonlyres/Mathematics/18-994Fall-2004/307E9323-F805-4A36-9AD9-063A0B401883/0/main1.pdf`.
11. Gálvez, J. A., and J. Aledo, *Complete Surfaces in the Hyperbolic Space with a Constant Principal Curvature*, to appear in Math. Nachr.

12. Gálvez, J. A., A. Martínez and F. Milán (2004), "Complete linear Weingarten surfaces of Bryant type. A Plateau problem at infinity", *Trans. Amer. Math. Soc.* **356**, 3405–3428.

13. Gálvez, J. A., A. Martínez and F. Milán, *Linear Weingarten Surfaces in* $\mathbb{R}^3$, preprint.

14. Gálvez, J. A., and P. Mira (2005), "Embeded isolated singularities of flat surfaces in hyperbolic 3-space", *Calc. Var.* **24**, 239–260.

15. Gálvez, J. A., and P. Miro (2005), "The Cauchy problem for Liouville equation and Bryant surfaces", *Adv. Math.* **195**, 456–490.

16. Hitchin, N., (2004), *Geometry of Surfaces*, Lecture Notes, address: `http://www.ma.utexas.edu/~hausel/hitchin/hitchinnotes/`.

17. Liouville, J. (1853), "Sur l'équation aux différences partielles $\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0$", *J. Math. Pures Appl.* **36**, 71–72.

18. *Maple 9.50*, Software, address: `http://maplesoft.com/`.

19. Mira, P. (2006), "Complete minimal Möbius strips in $\mathbb{R}^n$ and the Björling problem", *Journal of Geometry and Physics* **56**, 1506–1515.

20. *Riemann Surface*, address: `http://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_surface`.

Phụ lục A

Các bài toán Björling đã giải

Phụ lục này liệt kê các bài toán Björling đã giải. Chúng đều có duy nhất nghiệm và đều có hệ quả liên quan đến tính đối xứng của các mặt trong lớp được xét.

Lớp mặt	*Tài liệu*	*Tác giả*	*Năm*
`minimal`, $\mathbb{R}^3$	[10]	E. G. Björling, H. A. Schwarz	1844, 1890
`minimal`, $\mathbb{R}^n$	[4]	L. J. Alías, P. Mira	2002
`maximal`, $\mathbb{L}^3$	[3]	L. J. Alías et. al.	2003
`minimal Möbius strip`, $\mathbb{R}^n$	[19]	P. Mira	2005
`flat front`, $\mathbb{H}^3$	[14]	J. A. Gálvez, P. Mira	2005
`flat surface`, $\mathbb{H}^3$	[14]	J. A. Gálvez, P. Mira	2005
`CMC1`, $\mathbb{H}^3$	[15]	J. A. Gálvez, P. Mira	2005
`improper affine sphere`, $\mathbb{R}^3$	[2]	J. A. Aledo et. al.	*(preprint)*

Phụ lục B

Maple Worksheet

Phục lục này trình bày thủ tục `Maple` [18] để tính tích vô hướng $\langle \psi_z \wedge \psi_{\overline{z}}, \eta \rangle$ ở (3.56) và (3.83). Các mã nhập vào chương trình `Maple` được bắt đầu bằng dấu lớn hơn (>), được định dạng với kiểu chữ `typewriter`; chú thích được *in nghiêng*. Thứ tự mã nhập vào đúng như thứ tự trình bày ở đây; các dòng mã được đánh số để tiện theo dõi.

B.1 Các thủ tục

Khởi động lại `Maple`*, nạp gói* `LinearAlgebra` *và xác định kiểu cho các biến sẽ dùng. Ở đây,* `a`*,* `b` *là các hằng số thực như trong* (2.21)*;* `rho` *là ρ trong* (3.13)*. Biến số* `M_z` *chỉ tác động của toán tử Wirtinger ∂_z lên* `M`*. Biến* `Mx` *chỉ liên hợp phức của ma trận* `M`*.*

```
> restart:
> with(LinearAlgebra):
> assume(a, real) : assume(b, real) :
> assume(rho, real) : assume(rho_z, complex) :
> assume(G_z, complex) : assume(Gx_z, complex) :
```

Đổi từ ma trận trong Herm(2) *thành véc tơ nhờ phép đồng nhất nói ở Mục 2.1. Ta nhắc lại phép đồng nhất này như sau:*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longleftrightarrow (x, y, z, t) \longleftrightarrow \begin{bmatrix} x+t & y+iz \\ y-iz & x-t \end{bmatrix} \tag{B.1}$$

```
> get_vector_from_matrix := proc(M)
>   local a,b,c,d, vectorA;
>   a := M[1,1]; b := M[1,2]; c := M[2,1]; d := M[2,2];
>   vectorA := Vector[row]([(a+d)/2, (b+c)/2, (b-c)/(2*I), (a-d)/2]);
>   return vectorA;
> end:
```

Thủ tục sau đổi véc tơ trong $\mathbb{L}^4$ *thành ma trận trong* $\mathrm{Herm}(2)$ *nhờ* (B.1).

```
> get_matrix_from_vector := proc(V)
>   local x,y,z,t;
>   x := V[1] + V[4];
>   y := V[2] + I*V[3];
>   z := V[2] - I*V[3];
>   t := V[1] - V[4];
>   return <<x|y>,<z|t>>;
> end:
```

Cho S, M, N *là ba véc tơ trong* $\mathbb{L}^4$ *được cho ở dạng ma trận trong* $\mathrm{Herm}(2)$. *Thủ tục sau trả về kết quả* $S \times M \times N = M \wedge N$ *(tích có hướng* $\wedge$ *được lấy tại* S*). Ta sử dụng* (2.8) *để tính. Kết quả trả về ở dạng véc tơ.*

```
> cross_product := proc(S,M,N)
>   local vS, vM, vN, SMN, A, B, C, D;
>   vS := get_vector_from_matrix(S);
>   vM := get_vector_from_matrix(M);
>   vN := get_vector_from_matrix(N);
>   SMN := <<vS[1]|vS[2]|vS[3]|vS[4]>,
>           <vM[1]|vM[2]|vM[3]|vM[4]>,
>           <vN[1]|vN[2]|vN[3]|vN[4]>>;
>   A :=  Determinant(SubMatrix(SMN, [1,2,3], [2,3,4]));
>   B :=  Determinant(SubMatrix(SMN, [1,2,3], [1,3,4]));
>   C := -Determinant(SubMatrix(SMN, [1,2,3], [1,2,4]));
>   D :=  Determinant(SubMatrix(SMN, [1,2,3], [1,2,3]));
>   return Vector[row]([A,B,C,D]);
> end:
```

Tích vô hướng của hai véc tơ (dạng ma trận).

$$\langle M, N\rangle = -\frac{1}{2}\big\{\det(M+N) - \det(M) - \det(N)\big\} \tag{B.2}$$

```
> scalar_product := proc(M,N)
>   return -1/2*(Determinant(M+N) -Determinant(M) -Determinant(N));
> end:
```

Định nghĩa của `F` *cho ở* (3.25)*, còn* `Fx` *là liên hợp phức của* `F`.

```
> F := <<1|0>,<G|1>>:
> Fx := <<1|conjugate(G)>,<0|1>>:
```

B.2 Trường hợp $a + b = 1$

Ma trận `Omega` *được cho bởi* (3.5), `psi` *được tính theo công thức* `psi` $:= \psi = F\Omega F^*$. *Ta sử dụng* `U` *như ở* (3.33), *còn* `B`, `C` *được tính nhờ* (3.5) *và* (3.32); `Bx` $:= B^*$ *chỉ ma trận liên hợp phức của* B. *Để ý rằng, ta không triển khai* `A` *theo* ρ, G_z, ...

```
> U := (b/(2*a+2*b))*rho*G_z:
> C := 2/rho:
> B := (2*rho_z)/(rho*rho*G_z):
> Bx := (2*conjugate(rho_z))/(rho*rho*conjugate(G_z)):
> Omega := <<A|B>,<Bx|C>>:
> psi :=  F . Omega . Fx:
```

Ta tính `psi_z` $:= \psi_z$ *theo* (3.35), *trong khi* `psi_zx` $:= \psi_{\overline{z}}$ *chỉ là liên hợp phức của* ψ_z. *Từ đó, tính được tích chéo* `psi_z_wedge_psi_zx_as_matrix` $:= \psi \times \psi_z \times \psi_{\overline{z}} = \psi_z \wedge \psi_{\overline{z}}$.

```
> psi_z := F . <<A_z|B_z>,<U|0>> . Fx:
> psi_zx := F . <<conjugate(A_z)|conjugate(U)>,
>                 <conjugate(B_z)|0>> . Fx:
> psi_z_wedge_psi_zx_as_vector
>    := cross_product(psi, psi_z, psi_zx):
> psi_z_wedge_psi_zx_as_matrix
>    := get_matrix_from_vector(psi_z_wedge_psi_zx_as_vector):
```

`N` $:= N = \psi + \eta$ *được tính theo* (3.31), *còn* `eta` $:= \eta = N - \psi$.

```
> N := F . <<rho|0>,<0|0>> . Fx:
> eta := N - psi:
```

Cuối cùng, ta tính tích vô hướng $\langle \psi_z \wedge \psi_{\overline{z}}, \eta \rangle$.

```
> psi_z_wedge_psi_zx_X_eta
>    := scalar_product(psi_z_wedge_psi_zx_as_matrix, eta):
> tmp := simplify(psi_z_wedge_psi_zx_X_eta);
```

Kết quả sau khi được đơn giản hóa bằng `simplify` *chính là* (3.56):

```
tmp := -1/8*I*(
  - 4*abs(B_z)^2*a^2 - 8*abs(B_z)^2*b*a
  - 4*b^2*abs(B_z)^2 + rho^2*abs(G_z)^2*b^2
   )/(a+b)^2
```

B.3 Trường hợp $a + b = -1$

Ta dùng các biến số `M2` *tương ứng với* `M` *trong trường hợp* $a + b = 1$*. Các bước tính toán hoàn toàn tương tự như ở Mục B.2 và ta không nhắc lại ở đây. Xem Mục 3.4 về cách tính cách đại lượng* `A2`, `B2`, *...*

```
> U2 := (b/(2*a+2*b))*rho*Gx_z:
> C2 := 2/rho:
> B2 := (2*conjugate(rho_z) / (rho*rho*conjugate(Gx_z)):
> B2x := (2*rho_z)/(rho*rho*Gx_z):
> Omega2 := <<A2|B2>,<B2x|C2>>:

> psi2 := F .Omega .Fx:
> psi2_z := F . <<A2_z|U2>,<B2x_z|0>> . Fx:
> psi2_zx := F . <<conjugate(A2_z)|conjugate(B2x_z)>,
>                  <conjugate(U2)|0>> . Fx:
> psi2_z_W_psi2_zx_as_vector
>     := cross_product(psi2,psi2_z,psi2_zx):
> psi2_z_W_psi2_zx_as_matrix
>     := get_matrix_from_vector(psi2_z_W_psi2_zx_as_vector):

> N2 := F. <<rho|0>,<0|0>>. Fx:
> eta2 := N2 - psi2:

> psi2_z_W_ps2_zx_X_eta2
>     := scalar_product(psi2_z_W_psi2_zx_as_matrix, eta2):
> tmp := simplify(psi2_z_W_ps2_zx_X_eta2);
```

Kết quả sau khi được đơn giản hóa bằng `simplify` *chính là* (3.83)*:*

```
tmp := 1/8*I*(
  - 4*abs(B2x_z)^2*a^2 - 8*abs(B2x_z)^2*a*b
  - 4*abs(B2x_z)^2*b^2 + rho^2*abs(b^2*Gx_z^2)
   )/(a+b)^2
```