Terminales S – corrigé du devoir en classe n° 6

EXERCICE 1

1. *Paramètre λ de la loi exponentielle suivie par* X

   On a $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $E(X) = 5$ d'après l'énoncé, donc $\dfrac{1}{\lambda} = 5$ soit $\lambda = 0{,}2$.

2. *Proportion de disques durs retournés au fournisseur pour cause de panne pendant la période de garantie*

   On calcule $P(X \leqslant 2)$ et on a $P(X \leqslant 2) = 1 - e^{-0{,}2\times 2} = 1 - e^{-0{,}4} = 0{,}33$ à $0{,}01$ près.

3. *Calcul de* $P(X \geqslant 3)$

   $P(X \geqslant 3) = e^{-0{,}2\times 3} = e^{-0{,}6} = 0{,}55$ à $0{,}01$ près.

   Ainsi, 55 % des disques durs vendus ont une durée de vie supérieure à 3 ans.

4. *Probabilité que la durée de vie du disque dur dépasse* 5 *ans, sachant qu'il n'est plus sous garantie*

   On doit calculer $P_{\{X>2\}}(X > 5)$. D'après la propriété de durée de vie sans vieillissement, on a $P_{\{X>2\}}(X > 5) = P(X > 3) = P(X \geqslant 3) = 0{,}55$ à $0{,}01$ près.

EXERCICE 2

1. *Relations fonctionnelles vérifiées par la fonction exponentielle*

   D'après les propriétés de la fonction exponentielle, si $f(x) = e^x$, alors, pour tous réels x et y :

   $$f(x)f(y) = f(x+y) \text{ et } f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}.$$

2. *Valeur de* $A = e^3 \times \left(e^{-2}\right)^5 \times e$

   $A = e^3 \times e^{-10} \times e^1 = e^{3-10+1} = e^{-6}$.

3. *Sens de variation des suites* (u_n)

   On utilise la décroissance de la fonction f et la croissance de la fonction exponentielle, ainsi :

   Si $u_n = f\left(e^{-n}\right)$ alors (u_n) est croissante et si $u_n = e^{f(n)}$ alors (u_n) est décroissante.

4. *Résolution de* $(e^x + 3)(e^x - 1) \geqslant 0$

   Comme $e^x > 0$ pour tout réel x, l'inéquation est équivalente à $e^x - 1 \geqslant 0$ soit $e^x \geqslant 1$ c'est-à-dire $x \geqslant 0$. L'ensemble des solutions est donc $[0\,;\,+\infty[$.

5. *Calcul de* $I = \displaystyle\int_0^a \left(e^{2x} - x\right) dx$

   $$I = \left[\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{x^2}{2}\right]_0^a = \left(\frac{1}{2}e^{2a} - \frac{a^2}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{2a} - a^2 - 1\right).$$

EXERCICE 3

Partie A

$\boxed{f(x) = xe^{-x} \text{ avec } x \in \mathbb{R}}$

1. *Limites de* f *en* $-\infty$ *et en* $+\infty$

   On pose $y = -x$, ainsi $f(x) = -ye^{y}$.

   $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{y \to -\infty} (-ye^{y}) = 0$ (résultat du cours).
   On en déduit que l'axe des abscisses, d'équation $y = 0$, est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

   $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{y \to +\infty} (-ye^{y}) = -\infty$ car $\lim\limits_{y \to +\infty} (-y) = -\infty$ et $\lim\limits_{y \to +\infty} e^{y} = +\infty$.

2. *Variations de* f

   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

   $$f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times \left(-e^{-x}\right) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x}.$$

   Comme pour tout réel x on $e^{-x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$ (qui s'annule en 1).
   La fonction f est donc strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ 1]$ et strictement décroissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

3. $x \longmapsto g(x) = -(x + 1)e^{-x}$ *est une primitive de* f *sur* $\mathbb{R}$

   La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

   $$g'(x) = -1 \times e^{-x} - (x + 1) \times \left(-e^{-x}\right) = -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} = xe^{-x} = f(x).$$

   Comme $g' = f$, la fonction g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

4. *Signe de* $f(x)$ *selon les valeurs de* x

   Pour tout réel x on a $e^{-x} > 0$, donc le signe de $f(x)$ est celui de x, ainsi, $f(x) > 0$ si, et seulement si $x > 0$, $f(x) = 0$ si, et seulement si $x = 0$ et $f(x) < 0$ si, et seulement si $x < 0$.

5. *Calcul de l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe* $\mathcal{C}$*, l'axe des abscisses et les droites d'équations* $x = 0$ *et* $x = 1$

   Comme la fonction f est ***positive*** sur $[0\ ;\ 1]$, l'aire, en unités d'aire, est égale à :

   $$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = g(1) - g(0) = -2e^{-1} - (-1) = 1 - 2e^{-1} = 0{,}26 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Partie B

$\boxed{f_k(x) = kxe^{-kx} \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } k > 0}$

1. *Toutes les courbes $\mathcal{C}_k$ passent par un même point*

   Pour tout réel $k > 0$, $f_k(0) = 0 \times e^{-k\times 0} = 0$, ainsi toutes les courbes $\mathcal{C}_k$ passent par $O(0\,;\,0)$.

2. a. *Dérivée de f_k*

   La fonction f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$f_k'(x) = k\left[1 \times e^{-kx} + x \times \left(-ke^{-kx}\right)\right] = k\left(e^{-kx} - kxe^{-kx}\right) = k(1-kx)e^{-kx}.$$

   b. *Maximum de f_k*

   Pour tout réel $k > 0$ et tout réel x on a $ke^{-kx} > 0$, ainsi le signe de $f_k'(x)$ est celui de $1 - kx$ qui s'annule en $\dfrac{1}{k}$.

   En tenant compte de $k > 0$ on obtient les variations de f_k :

x	$-\infty$		$\frac{1}{k}$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_k(x)$		$\nearrow$	$f_k\left(\frac{1}{k}\right)$	$\searrow$	

   Ainsi f_k possède un maximum pour $x = \dfrac{1}{k}$ et ce maximum vaut $f_k\left(\frac{1}{k}\right) = k \times \dfrac{1}{k}e^{-k\times\frac{1}{k}} = e^{-1}$.

   c. *Comparaison de k_1 et 2 (méthode graphique)*

   D'après la question précédente, f_{k_1} possède un maximum en $\dfrac{1}{k_1}$ et f_2 possède un maximum en $\dfrac{1}{2}$, tous les deux égaux à e^{-1}. Graphiquement on a $\dfrac{1}{k_1} < \dfrac{1}{2}$ donc $k_1 > 2$.

   d. *Équation de la tangente à $\mathcal{C}_k$ en* O

   Cette tangente a pour équation $y = f_k'(0)(x-0) + f_k(0)$.

   Or $f_k(0) = 0$ et $f_k'(0) = k(1 - k\times 0)e^{-k\times 0} = k$ donc la tangente en O a pour équation $y = kx$.

   e. *Valeur de k_2 (méthode graphique)*

   Le coefficient directeur de la tangente en O à $\mathcal{C}_{k_2}$ a pour coefficient directeur k_2 d'après la question précédente.

   Or, sur le graphique, la tangente en O à $\mathcal{C}_{k_2}$ passe par le point de coordonnées $(0{,}2\,;\,0{,}6)$ ainsi $k_2 = \dfrac{0{,}6}{0{,}2} = 3$.