Terminales S – devoir en classe n° 5

Jeudi 16 janvier 2014

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2(x) + \cos(x)$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. a. Montrer que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de $\mathcal{C}$.
   b. Exprimer $f(x + 2\pi)$ en fonction de $f(x)$. Que peut-on en déduire ?
   c. Compléter la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ 2\pi]$ sur la feuille annexe.
2. Dans cette question, pour l'étude de f on se limitera à l'intervalle $I = [0\ ;\ \pi]$.
   a. Vérifier que $f'(x) = \sin(x)\left(2\cos(x) - \sqrt{3}\right)$.
   b. Étudier les variations de f sur I.
   c. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}\ ;\ \pi\right]$ dont on donnera un encadrement à 0,1 près.
   d. On souhaite déterminer un encadrement au millième près de α par la méthode de dichotomie. Compléter sur l'annexe l'algorithme correspondant.

EXERCICE 2

Partie A

Prérequis :

- Dire qu'une fonction f est dérivable en x_0 revient à dire que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.
- Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables en 0 avec : $\sin'(0) = 1$ et $\sin'(0) = 0$.
- $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

1. En utilisant les prérequis, déterminer les limites de $\dfrac{\sin(h)}{h}$ puis de $\dfrac{\cos(h) - 1}{h}$ lorsque h tend vers 0.
2. Montrer que pour tout réel a et tout réel non nul h :
$$\frac{\sin(a + h) - \sin(a)}{h} = \sin(a) \times \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(a) \times \frac{\sin(h)}{h}.$$
3. En déduire que la fonction sinus est dérivable en tout a de $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction cosinus.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]\pi\ ;\ 2\pi]$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x - \pi}$. En utilisant la question A. 3, montrer que :

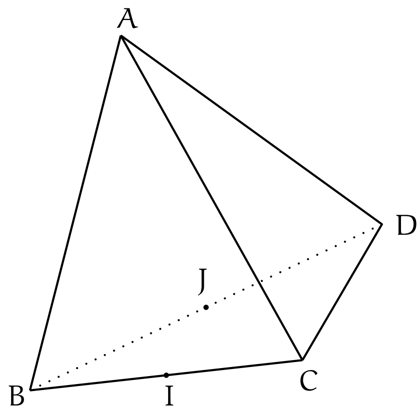
$$\lim_{x\to\pi} f(x) = -1 \quad \text{(on pourra poser } h = x - \pi\text{)}.$$

EXERCICE 3

On considère un tétraèdre régulier $ABCD$ dans lequel :

– I et J sont les milieux respectifs de $[BC]$ et $[BD]$;
– G est le point d'intersection des droites (DI) et (CJ).

1. Montrer que les plans (AID) et (ACJ) sont sécants suivant une droite que l'on déterminera.
2. Montrer que les plans (AID) et (ACJ) sont orthogonaux respectivement aux arêtes $[BC]$ et $[BD]$.
3. En déduire que la droite (AG) est perpendiculaire au plan (BCD).



EXERCICE 4

$ABCDEFGH$ est un cube. I et J sont les centres des faces $BCGF$ et $DCGH$.

Le but de l'exercice est de tracer la section du cube par le plan (AIJ) sur la figure donnée en annexe.

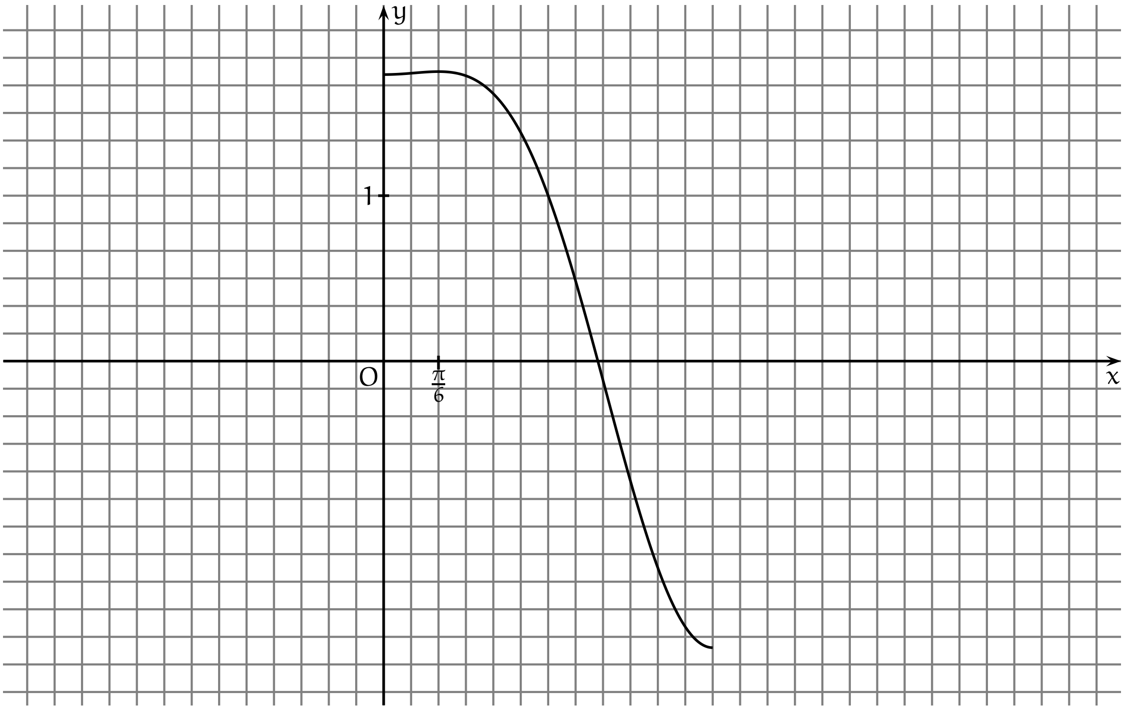
1. Montrer que les droites (IJ) et (DB) sont parallèles.
2. En déduire, en justifiant, l'intersection des plans (ABD) et (AIJ) caractérisée par la droite d sur la figure.
3. Construire l'intersection de la droite d et du plan (DCG). En déduire la trace sur la face $DCGH$ de la section du cube par le plan (AIJ).
4. Terminer la trace de la section du cube par le plan (AIJ).

NOM : ....

Prénom : ....

ANNEXE DE L'EXERCICE 1

Question 1. c



Question 2. d

Variable :	a, b, m, sont des nombres réels
Initialisation :	Affecter à a la valeur $\frac{\pi}{6}$
	Affecter à b la valeur π
Traitement :	Tant que $b - a$ ...
	m prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
	Si $f(a) \times f(m) \leqslant 0$
	Alors ... prend la valeur m
	Sinon ... prend la valeur m
	Fin Si
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher a, b

ANNEXE DE L'EXERCICE 4