Terminales S – corrigé du devoir en classe n° 3

EXERCICE 1

Partie A

$\boxed{f(x) = -x^3 + 3x + 3 \text{ avec } x \in \mathbb{R}}$

1. *Variations, limites de* f *en* $-\infty$ *et* $+\infty$

   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a $f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x-1)(x+1)$.

   La dérivée de f est donc un trinôme du second degré qui s'annule en 1 et -1.

   On a aussi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x^3\right) = -\infty$, de même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

   Les variations de f sont résumées dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

2. *Étude de l'équation* $f(x) = 0$
   - L'image de l'intervalle $]-\infty\,;\,1]$ par la fonction *continue* f est l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.
     Comme $0 \notin [1\,;\,+\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]-\infty\,;\,1]$.
   - La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$ et l'image de l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ par f est l'intervalle $]-\infty\,;\,5]$.
     D'après le théorème des fonctions continues strictement monotones, f prend une fois et une seule toutes les valeurs de $]-\infty\,;\,5]$.
     Comme $0 \in\,]-\infty\,;\,5]$, il existe α unique dans $[1\,;\,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

   Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ possède une seule solution réelle α et on a $\alpha \geqslant 1$.

3. *Encadrement de* α *d'amplitude* 10^{-2}

   Par la méthode du balayage on obtient $2{,}10 \leqslant \alpha \leqslant 2{,}11$.

Partie B

$\boxed{g(x) = \dfrac{f(x)}{x^3+1} \text{ avec } x \in \mathbb{R} - \{-1\}}$

1. a. *Signe de* $x^3 + 1$

   pour tout réel x on a $(x+1)(x^2 - x + 1) = x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 = x^3 + 1$.

   Le trinôme $x^2 - x + 1$ n'a pas de racine réelle donc, pour tout réel x, on a $x^2 - x + 1 > 0$, ainsi le signe de $x^3 + 1$ est celui de $x + 1$, donc :
   - $x^3 + 1 > 0$ pour tout $x > -1$;
   - $x^3 + 1 < 0$ pour tout $x < -1$;
   - $x^3 + 1 = 0$ si, et seulement si, $x = -1$.

   b. *Limites, à gauche et à droite, de* g *en* -1

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \left(x^3 + 1\right) = 0 \\ x < -1 \text{ donc } x^3 + 1 < 0 \end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} g(x) = -\infty, \text{ de même, } \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} g(x) = +\infty.$$

   On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ possède une asymptote (parallèle à l'axe des ordonnées) d'équation $x = -1$.

2. a. *Asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$*

   $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-x^3}{x^3}\right) = -1$, de même, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$.

   Ainsi la droite Δ (parallèle à l'axe des abscisses) d'équation $y = -1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

   b. *Position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ*

   Pour tout réel $x \neq -1$ on a :

$$g(x) + 1 = \frac{f(x)}{x^3+1} + 1 = \frac{f(x) + x^3 + 1}{x^3+1} = \frac{-x^3 + 3x + 3 + x^3 + 1}{x^3+1} = \frac{3x+4}{x^3+1}.$$

   Le signe de $g(x)+1$ est donné dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		-1		$+\infty$
$3x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
x^3+1		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)+1$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

   On a donc :
   - $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{4}{3}\right[$ et sur $]-1\,;\,+\infty[$;
   - $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ sur $\left]-\frac{4}{3}\,;\,-1\right[$;
   - $\mathscr{C}$ coupe Δ au point de coordonnées $\left(-\frac{4}{3}\,;\,-1\right)$.

EXERCICE 2

$\boxed{f_1(x) = \sqrt{x^2+1},\ f_2(x) = x \text{ et } k(x) = f_1(x) - f_2(x) \text{ avec } x \in [0\,;\,+\infty[}$

1. *Limites de f_1 et f_2 en $+\infty$*
   - En posant $y = x^2 + 1$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{y\to+\infty} \sqrt{y} = +\infty$, d'après le théorème de la limite d'une fonction composée.
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

   Ainsi, on ne peut pas en déduire la limite de $k = f_1 - f_2$ en $+\infty$ car on obtient la forme indéterminée « $\infty - \infty$ ».
2. *Nouvelle expression de k*

   Pour tout réel $x \geqslant 0$ on a $\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - x^2 = x^2 + 1 - x^2 = 1$.

   Donc, pour tout réel $x \geqslant 0$ on a $\sqrt{x^2+1} + x \neq 0$ et $k(x) = \sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.
3. *Encadrement de k*

   Pour tout $x > 0$ on a $x^2 + 1 \geqslant x^2$ donc $\sqrt{x^2+1} \geqslant \sqrt{x^2}$ (la fonction racine carrée est croissante).

   On obtient donc $\sqrt{x^2+1} \geqslant x$ d'où $\sqrt{x^2+1} + x \geqslant 2x > 0$ et en utilisant la fonction inverse (qui est décroissante) on a $0 < \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \leqslant \dfrac{1}{2x}$ soit $0 \leqslant k(x) \leqslant \dfrac{1}{2x}$.
4. *Limite de k en $+\infty$*

   $0 \leqslant k(x) \leqslant \dfrac{1}{2x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = 0$.

EXERCICE 3

$$\boxed{f(x) = \dfrac{x^3 - 3x - 6}{x + 2} \text{ et } g(x) = (x-1)^2 \text{ avec } x \in]-2\,;\,+\infty[}$$

1. *Conjecture pour les « grandes valeurs » de* x

   On constate que, pour les grandes valeurs de x, les représentations graphiques de f et g sont très proches l'une de l'autre. On peut conjecturer que ces courbes sont asymptotes l'une de l'autre.

2. a. *Calcul de* $g(x) - f(x)$

   Pour tout réel $x > -2$:

   $$g(x) - f(x) = (x-1)^2 - \frac{x^3 - 3x - 6}{x+2} = \frac{(x-1)^2(x+2) - \left(x^3 - 3x - 6\right)}{x+2} = \cdots = \frac{8}{x+2}.$$

   b. *Validation de la conjecture*

   Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+2) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[g(x) - f(x)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{8}{x+2} = 0$.

   La conjecture est validée, en effet $g(x) - f(x)$ représente la différence des ordonnées entre un point sur la représentation graphique de g et le point sur la représentation graphique de f ayant la même abscisse.

3. a. *But de l'algorithme*

   L'algorithme proposé détermine la plus petite valeur entière de x supérieure ou égale à -1 telle que $\dfrac{8}{x+2} \leqslant 10^{-N}$, où l'entier naturel N est choisi par l'utilisateur.

   b. *Affichage lorsque* $N = 2$

   L'algorithme affiche 798.

   Remarque : on peut déterminer cette valeur en résolvant l'inéquation $\dfrac{8}{x+2} \leqslant 10^{-2}$ dans l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$.