Terminales S – devoir en classe n° 3

Jeudi 21 novembre 2013

EXERCICE 1

Les deux parties de l'exercice peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^3 + 3x + 3.$$

1. Étudier les variations de f, les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. Construire le tableau de variation de la fonction f.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.
3. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}. Justifier.

Partie B

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^3 + 1}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthogonal.
On ne demande pas de tracer $\mathscr{C}$.

1. a. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$.
   En déduire le signe de $x^3 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

   b. Déterminer les limites suivantes en les justifiant :

   $$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} g(x).$$

   En donner une interprétation graphique.
2. a. Justifier que $\mathscr{C}$ possède une asymptote Δ d'équation $y = -1$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

   b. En étudiant le signe de $g(x) + 1$, déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

EXERCICE 2

On considère les fonctions f_1, f_2 et k définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_1(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \quad f_2(x) = x \quad \text{et} \quad k(x) = f_1(x) - f_2(x).$$

1. Déterminer les limites de f_1 et f_2 en $+\infty$.
   Peut-on en déduire la limite de k en $+\infty$?
2. Justifier que, pour tout x positif ou nul, $k(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$.
3. En déduire que, pour tout x strictement positif, $0 \leqslant k(x) \leqslant \dfrac{1}{2x}$.
4. Déterminer la limite de k en $+\infty$.

EXERCICE 3

On considère les fonctions f et g définies sur $]-2\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x - 6}{x + 2} \quad \text{et} \quad g(x) = (x-1)^2.$$

1. Tracer dans une même fenêtre de votre calculatrice graphique les courbes représentatives des fonctions f et g.
   Quelle conjecture peut-on faire pour les grandes valeurs de x ?
2. a. Démontrer que, pour tout réel $x > -2$:

   $$g(x) - f(x) = \frac{8}{x+2}.$$

   b. En déduire la limite de $g(x) - f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
   Votre conjecture est-elle validée ?
3. On considère l'algorithme suivant :

Variables	x est un nombre réel N est un nombre entier naturel
Initialisation	x prend la valeur -1
Traitement	On saisit la valeur de N Tant que $\dfrac{8}{x+2} > 10^{-N}$ Début du « Tant que » x prend la valeur $x+1$ Fin du « Tant que »
Sortie	Afficher x

   a. Que fait cet algorithme ?
   b. Qu'affiche-t-il lorsqu'on saisit $N = 2$?