$\boxed{\text{Terminales S – corrigé du devoir en classe n° 1}}$

EXERCICE 1

1. *Limite de la suite* (a_n) *définie par* $a_n = \dfrac{3n^2+1}{2n^2+n-5}$

   Pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \dfrac{n^2\left(\dfrac{3n^2}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(\dfrac{2n^2}{n^2}+\dfrac{n}{n^2}-\dfrac{5}{n^2}\right)} = \dfrac{3+\dfrac{1}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n}-\dfrac{5}{n^2}}$.

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2} = 0$, en utilisant les théorèmes sur les limites, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{3}{2}$.

2. *Limite de la suite* (b_n) *définie par* $b_n = \dfrac{2-\sin(n)}{n+1}$

   Pour tout entier naturel n, on a $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ soit $-1 \leqslant -\sin(n) \leqslant 1$ d'où $1 \leqslant 2-\sin(n) \leqslant 3$, et en divisant les trois membres de cette double inégalité par $n+1>0$, on obtient alors $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{2-\sin(n)}{n+1} \leqslant \dfrac{3}{n+1}$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{n+1} \leqslant b_n \leqslant \dfrac{3}{n+1}$.

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3}{n+1} = 0$, en utilisant le théorème « des gendarmes » on a $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

EXERCICE 2

$\boxed{u_{n+1} = 2u_n - 2n + 3 \text{ et } u_0 = 0}$

1. *Algorithme pour calculer* u_{15}

   Il faut compléter l'algorithme avec :

   u prend la valeur $2u - 2n + 3$
   n prend la valeur $n + 1$

2. a. *Nature de la suite* (x_n) *définie par* $x_n = u_n - 2n + 1$

   Pour tout entier naturel n :
   $x_{n+1} = u_{n+1} - 2(n+1) + 1 = 2u_n - 2n + 3 - 2n - 2 + 1 = 2u_n - 4n + 2 = 2\left(u_n - 2n + 1\right) = 2x_n$.
   Donc (x_n) est la suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $x_0 = u_0 - 2\times 0 + 1 = 1$.

   b. *Expression de* x_n *en fonction de* n

   Pour tout entier naturel n, $x_n = x_0 q^n = 2^n$.

   c. *Expression de* u_n *en fonction de* n

   Pour tout entier naturel n, $x_n = u_n - 2n + 1$ donc $u_n = x_n + 2n - 1$, ainsi, $u_n = 2^n + 2n - 1$.

   d. *Limite de* (u_n)

   Comme $2 > 1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$, de plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n-1) = +\infty$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (la suite (u_n) est divergente).

EXERCICE 3

$$\boxed{v_{n+1} = \frac{2v_n + 4}{6 - v_n} \text{ et } v_0 = 0}$$

1. a. *Valeurs de v_1 et v_2*

   On obtient $v_1 = \dfrac{2}{3}$ et $v_2 = 1$.

   b. *Expression de v_n en fonction de n (récurrence)*

   - $v_0 = 0$ et $\dfrac{2 \times 0}{0+2} = 0$ donc la formule $v_n = \dfrac{2n}{n+2}$ est vérifiée pour $n = 0$.
   - On suppose que $v_n = \dfrac{2n}{n+2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

     Pour tout entier naturel n :

     $$v_{n+1} = \frac{2v_n + 4}{6 - v_n} = \frac{2 \times \dfrac{2n}{n+2} + 4}{6 - \dfrac{2n}{n+2}} = \frac{\dfrac{4n + 4n + 8}{n+2}}{\dfrac{6n + 12 - 2n}{n+2}} = \frac{8n+8}{4n+12} = \frac{2n+2}{n+3} = \frac{2(n+1)}{(n+1)+2}.$$

     La propriété « $v_n = \dfrac{2n}{n+2}$ » est donc récurrente.

   Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{2n}{n+2}$.

2. a. *Sens de variation de (v_n)*

   Pour tout entier naturel n :

   $v_{n+1} - v_n = \dfrac{2n+2}{n+3} - \dfrac{2n}{n+2} = \dfrac{(2n+2)(n+2) - 2n(n+3)}{(n+2)(n+3)} = \dfrac{4}{(n+2)(n+3)} > 0$ (car n est un entier naturel) donc la suite (v_n) est strictement croissante.

   b. *(v_n) est majorée*

   Pour tout entier naturel n :

   $v_n - 2 = \dfrac{2n}{n+2} - 2 = \dfrac{2n - 2(n+2)}{n+2} = \dfrac{-4}{n+2} < 0$ (car n est un entier naturel) donc $v_n < 2$ ce qui signifie que la suite (v_n) est majorée par 2.

   c. *Conséquence*

   (v_n) étant une suite croissante et majorée, (v_n) converge.

3. *Limite de la suite (v_n)*

   Pour tout entier naturel n non nul, $v_n = \dfrac{2n}{n\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)} = \dfrac{2}{1 + \dfrac{2}{n}}$.

   Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{n} = 0$, en utilisant les théorèmes sur les limites, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 2$.