Terminale S_4 – corrigé du devoir à la maison n° 8

EXERCICE 1

1. *Probabilité que le tube soit accepté au contrôle*

   L'épaisseur X d'un tube (en mm) suit la loi normale de moyenne 1,5 et d'écart type 0,07.
   Le tube est accepté lorsque $1{,}35 \leqslant X \leqslant 1{,}65$ et on a $P(1{,}35 \leqslant X \leqslant 1{,}65) = 0{,}968$ à 0,001 près.

2. *Calcul de* σ_1

   X_1 est ici la variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne 1,5 et d'écart type σ_1 et on cherche σ_1 tel que $P(1,35 \leqslant X_1 \leqslant 1,65) = 0{,}99$.

   On a donc $P\left(\dfrac{1{,}35-1{,}5}{\sigma_1} \leqslant \dfrac{X_1-1{,}5}{\sigma_1} \leqslant \dfrac{1{,}65-1{,}5}{\sigma_1}\right) = 0{,}99$.

   On pose $Y = \dfrac{X_1-1{,}5}{\sigma_1}$ et Y suit la loi normale centrée réduite.

   On cherche donc σ_1 tel que $P\left(-\dfrac{0{,}15}{\sigma_1} \leqslant Y \leqslant \dfrac{0{,}15}{\sigma_1}\right) = 0{,}99$.

   Or, pour tout réel a strictement positif, $P(-a \leqslant Y \leqslant a) = 2\Phi(a) - 1$ où Φ est la fonction définie pour tout réel t par $\Phi(t) = P(Y \leqslant t)$.

   On cherche ainsi σ_1 tel que $2\Phi\left(\dfrac{0{,}15}{\sigma_1}\right) - 1 = 0{,}99$ soit $\Phi\left(\dfrac{0{,}15}{\sigma_1}\right) = 0{,}995$.

   Soit α tel que $\Phi(\alpha) = 0{,}995$, ainsi $\dfrac{0{,}15}{\sigma_1} = \alpha$ d'où $\sigma_1 = \dfrac{0{,}15}{\alpha}$.

   Avec la calculatrice, on obtient $\alpha = 2{,}575\,83$ à 10^{-5} près, d'où $\sigma_1 = 0{,}06$ mm à 0,01 mm près.

EXERCICE 2

1. *Calcul de la moyenne* μ *et de l'écart type* σ

   La durée de vie X d'une clé USB (en mois) suit la loi normale de moyenne μ et d'écart type σ.

   D'après l'énoncé, $P(15 \leqslant X \leqslant 25) = 0{,}75$ et $P(X \leqslant 15) = 0{,}05$.

   On a donc $P(X \leqslant 25) = P(X < 15) + P(15 \leqslant X \leqslant 25) = 0{,}05 + 0{,}75 = 0{,}8$.

   On peut écrire $P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \dfrac{25-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}8$ et $P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \dfrac{15-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}05$.

   On pose $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ et Y suit la loi normale centrée réduite.

   On obtient $P\left(Y \leqslant \dfrac{25-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}8$ et $P\left(Y \leqslant \dfrac{15-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}05$.

   En utilisant la fonction Φ (cf. l'exercice 1), on a $\Phi\left(\dfrac{25-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}8$ et $\Phi\left(\dfrac{15-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}05$.

   On définit a et b tels que $\Phi(a) = 0{,}8$ et $\Phi(b) = 0{,}05$, on a donc $\dfrac{25-\mu}{\sigma} = a$ et $\dfrac{15-\mu}{\sigma} = b$, ainsi, en résolvant, on obtient $\mu = \dfrac{15a-25b}{a-b}$ et $\sigma = \dfrac{10}{a-b}$.

   Avec la calculatrice, on a, à 10^{-5} près, $a = 0{,}841\,62$ et $b = -1{,}644\,85$.

   On obtient $\mu = 21{,}6$ mois à 0,1 mois près et $\sigma = 4$ mois à 1 mois près.

2. *Probabilité d'avoir une clé USB dont la durée de vie soit comprise entre* 20 *et* 25 *mois*

   X suit la loi normale de moyenne 21,6 et d'écart type 4 et $P(20 \leqslant X \leqslant 25) = 0{,}458$ à 0,001 près.

EXERCICE 3 (sujet C page 157)

$$\boxed{f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x} \text{ avec } x \in]1~;~+\infty[}$$

1. *Variations de* f

   La fonction f est dérivable sur $]1~;~+\infty[$et pour tout réel $x > 1$ on a $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x(\ln x)^2} > 0$ donc f est strictement croissante sur $]1~;~+\infty[$.

2. *Limites de* f *en* 1 *et en* $+\infty$

   On obtient $\displaystyle\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3. a. *Condition nécessaire et suffisante pour que la tangente* T_a *à* $\mathscr{C}$ *passe par* O

   T_a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ (avec $a > 1$).

   T_a passe par O si, et seulement si, $0 = f'(a)(0 - a) + f(a)$ donc, si, et seulement si $f(a) - af'(a) = 0$.

   b. *Équivalence des équations* $g(x) = 0$ *et* $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ *sur* $]1~;~+\infty[$

   g est la fonction définie par $g(x) = f(x) - xf'(x)$ avec $x \in]1~;~+\infty[$. Pour tout réel $x > 1$:

   $$g(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x} - x\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x(\ln x)^2}\right] = \ln x - \frac{1}{\ln x} - 1 - \frac{1}{(\ln x)^2} = \frac{(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1}{(\ln x)^2}.$$

   Comme $\ln x \neq 0$ pour tout $x > 1$, les équations $g(x) = 0$ et $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ ont les mêmes solutions sur $]1~;~+\infty[$.

   c. *La fonction* $t \longmapsto u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$ *s'annule une fois et une seule sur* $\mathbb{R}$

   Pour répondre à cette question, on étudie les variations de u, et on utilise le théorème des fonctions continues strictement monotones.

   Ainsi, l'équation $u(t) = 0$ a une seule solution réelle (et cette solution α est supérieure à 1).

   d. *Existence d'une tangente unique à la courbe* $\mathscr{C}$ *passant par* O

   D'après ce qui précède, la tangente T_a passe par O si, et seulement si $u(t) = 0$ avec $t = \ln a$ et $a > 1$.

   Comme l'équation $u(t) = 0$ a une solution unique $\alpha > 1$, il existe un unique nombre réel $a = e^{\alpha} > 1$ tel que $(\ln a)^3 - (\ln a)^2 - \ln a - 1 = 0$, donc, il existe une seule tangente à la courbe $\mathscr{C}$ qui passe par O (c'est la tangente au point d'abscisse e^{α}).