Terminale S_4 – devoir à la maison n° 8

À rendre vendredi 11 avril 2014

EXERCICE 1

Une usine fabrique des tubes en polyéthylène pour le chauffage géothermique.
Un tube est accepté au contrôle si son épaisseur est comprise entre 1,35 millimètres et 1,65 millimètres.

1. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tube prélevé au hasard dans la production d'une journée associe son épaisseur exprimée en millimètres.

   On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 1,5 et d'écart-type 0,07.

   Calculer la probabilité qu'un tube prélevé au hasard dans la production de la journée soit accepté au contrôle. On donnera le résultat arrondi à 10^{-3}.
2. L'entreprise désire améliorer la qualité de la production des tubes. Il est envisagé pour cela de modifier le réglage des machines produisant ces tubes.

   On note X_1 la variable aléatoire qui, à chaque tube prélevé dans la production future, associera son épaisseur. On suppose que la variable aléatoire X_1 suit une loi normale de moyenne 1,5 et d'écart-type σ_1.

   Déterminer σ_1 pour que la probabilité qu'un tube prélevé au hasard dans la production future soit accepté au contrôle soit égale à 0,99.
   On donnera le résultat arrondi à 10^{-2}.

EXERCICE 2

La durée de vie d'une clé USB, exprimée en mois, est modélisé par une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne et d'écart type inconnus. Selon le fabricant, 75 % des clés produites ont une durée de vie comprise entre 15 et 25 mois. La garantie s'applique sur cette période en considérant que 5 % des clés de la production ont une durée de vie inférieure à 15 mois.

1. Calculer la moyenne μ (la valeur sera arrondie au dixième près) et l'écart type σ (la valeur sera arrondie à l'unité près) de la loi.
2. Quelle est la probabilité d'avoir une clé USB dont la durée de vie soit comprise entre 20 et 25 mois ?

EXERCICE 3 (sujet C page 157)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{\ln x}$.
Dans un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{\imath};\,\vec{\jmath})$, on nomme $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer les limites de la fonction f en 1 et en $+\infty$.
3. On se propose de chercher les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ passant par le point O.
   a. Soit a un réel appartenant à l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que la tangente T_a à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a passe par l'origine du repère si, et seulement si, $f(a) - af'(a) = 0$.
   b. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - xf'(x)$.
   Montrer que sur $]1\,;\,+\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ ont les mêmes solutions.
   c. Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$, montrer que la fonction u s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$.
   d. En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe $\mathscr{C}$ passant par le point O.