Terminale S_4 – devoir à la maison n° 6
À rendre jeudi 30 janvier 2014

EXERCICE 1 – suites et probabilités

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}.$$

   a. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $v_n = u_n - \dfrac{2}{5}$
   Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n.

2. On considère deux dés cubiques, notés A et B. Le dé A comporte trois faces rouges et trois faces blanches. Le dé B comporte quatre faces rouges et deux faces blanches.
On choisit un dé au hasard et on le lance : si on obtient une face rouge, on garde le même dé, si on obtient une face blanche, on change de dé. Puis on relance le dé et ainsi de suite.
On note :
   - A_n l'évènement : « on utilise le dé A au n-ième lancer » ;
   - R_n l'évènement : « on obtient une face rouge au n-ième lancer » ;
   - $\overline{B}$ l'évènement contraire d'un évènement B ;
   - a_n et r_n les probabilités respectives de A_n et R_n.

   a. Déterminer a_1.

   b. Déterminer r_1. Pour cela, on pourra s'aider d'un arbre.

   c. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $R_n = (R_n \cap A_n) \cup \left(R_n \cap \overline{A_n}\right)$.
   En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $r_n = -\dfrac{1}{6}a_n + \dfrac{2}{3}$.

   d. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup \left(\overline{A_n} \cap \overline{R_n}\right)$.

   e. En déduire que, pour tout entier n non nul, $a_{n+1} = \dfrac{1}{6}a_n + \dfrac{1}{3}$, puis déterminer l'expression de a_n en fonction de n.

   f. En déduire l'expression de r_n en fonction de n puis la limite de r_n quand n tend vers $+\infty$.
   Donner une interprétation de cette limite.

EXERCICE 2 – géométrie dans l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$.
On considère les points $A(0\,;\,0\,;\,1)$, $B(-3\,;\,0\,;\,0)$, $C(-1\,;\,-2\,;\,0)$, $D(6\,;\,0\,;\,-1)$ et $E(0\,;\,3\,;\,1)$.

1. a. Démontrer que les points A, B et C déterminent un plan noté P_1.
   b. Démontrer que les points O, D et E déterminent aussi un plan noté P_2.
2. a. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{OD}$ ne sont pas coplanaires.
   b. Que peut-on en déduire pour les plans P_1 et P_2 ?
3. a. Donner une représentation paramétrique de chacun des plans P_1 et P_2.
   b. En déduire une représentation paramétrique de la droite d d'intersection des plans P_1 et P_2.