Terminale S_4 – corrigé du devoir à la maison n° 4

EXERCICE 1

$\boxed{f(x) = \dfrac{1-x}{x^3+1} \text{ avec } x \in]-1\,;\,+\infty[}$

1. *Dérivée de* f

   f est dérivable sur $]-1\,;\,+\infty[$ et pour tout $x > -1$, $f'(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(x^3+1)^2}$.

   Pour tout $x > -1$, $(x^3+1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

2. $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ *avec* $x \in [-1\,;\,+\infty[$

   a. *Variations de* g

   g est dérivable sur $[-1\,;\,+\infty[$ et pour tout $x \geqslant -1$, $g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$.

x	-1		0		1		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0		$+$		
$g(x)$	-6	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   b. *Équation* $g(x) = 0$

   Sur $]-1\,;\,1]$, la fonction g a un maximum égal à -1 (pour $x = 0$), donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]-1\,;\,1]$.

   Sur $[1\,;\,+\infty[$, la fonction g est continue et strictement croissante, d'après le théorème de la bijection, g prend toutes les valeurs de $[-2\,;\,+\infty[$ une fois et une seule, donc il existe $\alpha \geqslant 1$ unique tel que $g(\alpha) = 0$.

   Conclusion : l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique α dans $]-1\,;\,+\infty[$.

   Comme $g(1{,}6) = -0{,}488 \leqslant 0$ et $g(1{,}7) = 0{,}156 \geqslant 0$ on a $1{,}6 \leqslant \alpha \leqslant 1{,}7$.

   c. *Signe de* $g(x)$

x	-1		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

3. *Tableau de variation de* f

   $f'(x)$ a le signe de $g(x)$ sur $]-1\,;\,+\infty[$.

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0

4. *Tangente* Δ *au point* A *d'abscisse nulle*

   Δ a pour équation $y = -x + 1$.

   Pour tout $x > -1$, $f(x) - (-x+1) = \dfrac{x^3(x-1)}{x^3+1}$ a le même signe que $-x$ sur l'intervalle $]-1\,;\,1]$.

   La courbe $\mathscr{C}$ est donc au-dessus de Δ sur $]-1\,;\,0]$ et au-dessous de Δ sur $[0\,;\,1]$. La courbe $\mathscr{C}$ traverse donc sa tangente en A, il y a un changement de concavité en A, on dit que A est un *point d'inflexion*.

5. *Tangente* d *au point* B *d'abscisse égale à* 1

   d a pour équation $y = \dfrac{-x+1}{2}$.

   Pour tout $x > -1$, $f(x) - \dfrac{-x+1}{2} = \dfrac{(x-1)^2(x^2+x+1)}{2(x^3+1)} \geqslant 0$, donc $\mathscr{C}$ est située au-dessus de d.

6. *Représentation graphique de* f

   Comme $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$, la droite, parallèle à l'axe des ordonnées, d'équation $x = -1$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

   Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, l'axe des abscisses, d'équation $y = 0$, est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

   Comme $f'(\alpha) = 0$, au point d'abscisse α la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

   On trace ensuite la courbe $\mathscr{C}$, les tangentes et l'asymptote d'équation $x = -1$.

EXERCICE 2

$\boxed{f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x+x^2} \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt, \ n \text{ étant un entier naturel non nul}}$

1. *La suite* (I_n) *est bien définie*

   Pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$, donc l'intégrale $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$ existe, ainsi la suite (I_n) est bien définie.

2. *Sens de variation de* (I_n)

   D'après les propriétés des suites géométriques, pour tout réel t de $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel n non nul, $t^{n+1} \leqslant t^n$.

   De plus, pour tout réel t de $[0\,;\,1]$ on a $1+t+t^2 > 0$, donc $\dfrac{t^{n+1}}{1+t+t^2} \leqslant \dfrac{t^n}{1+t+t^2}$.

   En intégrant sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ on obtient $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t+t^2}dt \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+t^2}dt$, soit $I_{n+1} \leqslant I_n$: la suite (I_n) est décroissante.

   Remarque : pour tout réel t de $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel n non nul, $f_n(t) \geqslant 0$ donc $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt \geqslant 0$, ainsi la suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, donc (I_n) converge.

3. a. *Encadrement de* $x \longmapsto \varphi(x) = 1+x+x^2$ *sur* $[0\,;\,1]$

   La fonction φ est dérivable sur $[0\,;\,1]$ et $\varphi'(x) = 1+2x > 0$ pour tout réel x de $[0\,;\,1]$, donc φ est croissante sur $[0\,;\,1]$.

   Ainsi, pour tout réel x de $[0\,;\,1]$, $\varphi(0) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(1)$ soit $1 \leqslant \varphi(x) \leqslant 3$.

   b. *Encadrement de* f_n *sur* $[0\,;\,1]$ *par deux fonctions monômes*

   Pour tout réel t de $[0\,;\,1]$ on a $1 \leqslant 1+t+t^2 \leqslant 3$ donc $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{1+t+t^2} \leqslant 1$ et comme $t^n \geqslant 0$ on obtient $\dfrac{t^n}{3} \leqslant \dfrac{t^n}{1+t+t^2} \leqslant t^n$, soit $\dfrac{t^n}{3} \leqslant f_n(t) \leqslant t^n$.

   Encadrement de I_n

   D'après ce qui précède, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{3}\,dt \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 t^n\,dt$ soit $\dfrac{1}{3(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ en utilisant le résultat donné par Xcas et la linéarité de l'intégrale.

4. *Limite de* (I_n)

   Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{3(n+1)} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, d'après le théorème des gendarmes, la suite (I_n) converge vers 0.