Terminale S_4 – devoir à la maison n° 4
À rendre vendredi 6 décembre 2013

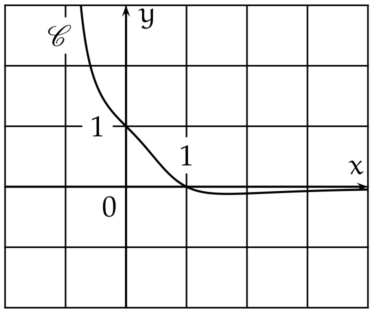
EXERCICE 1

f est la fonction numérique définie pour tout réel x de $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ (unité graphique : 4 cm).

À l'aide d'un logiciel, on a tracé ci-contre la courbe $\mathscr{C}$. L'étude qui va suivre permet de préciser le tracé graphique, en particulier l'allure de $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, et d'obtenir des renseignements complémentaires sur $\mathscr{C}$.
En effet, la courbe fournie par l'ordinateur ou la calculatrice ne donne pas toujours des renseignements certains, mais des conjectures que l'on doit confirmer ou infirmer. Néanmoins, outre les possibilités de conjecture, la vision de la courbe peut permettre de déceler des erreurs grossières dans les calculs.



1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]-1\ ;\ +\infty[$ et vérifier que $f'(x)$ a le même signe que $2x^3-3x^2-1$.
2. On note g la fonction définie pour tout réel x de $[-1\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.
   a. Étudier les variations de g et donner sa limite en $+\infty$.
   Dresser le tableau de variations de g.
   Pour cette question, l'utilisation du discriminant est interdite.
   b. Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $[-1\ ;\ +\infty[$ et donner un encadrement de α de longueur 10^{-1}.
   c. En déduire, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.
3. En utilisant les résultats précédents, dresser le tableau de variations de f.
   On calculera les limites de f en -1 et en $+\infty$.
4. Écrire une équation de la tangente Δ à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0.
   Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ sur l'intervalle $]-1\ ;\ 1]$.
5. Prouver que $\mathscr{C}$ est située au-dessus de sa tangente d au point B d'abscisse 1.
6. Préciser les asymptotes à $\mathscr{C}$.
   Tracer $\mathscr{C}$ et ses asymptotes, les droites Δ et d.
   Pour cela, on utilisera un logiciel de géométrie dynamique comme Geogebra disponible ici : `http://www.geogebra.org/cms/fr`.

EXERCICE 2 (d'après l'exercice n° 101 page 183)

Pour tout entier naturel n non nul, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_n par $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x+x^2}$ et la suite (I_n) par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt.$$

1. Montrer que cette suite est bien définie.
2. Étudier son sens de variation.
3. a. Étudier les variations de $x \longmapsto \varphi(x) = 1 + x + x^2$ sur $[0\,;\,1]$ et en déduire un encadrement de φ sur $[0\,;\,1]$.

   b. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que, pour tout t de $[0\,;\,1]$, $\dfrac{t^n}{3} \leqslant f_n(t) \leqslant t^n$.

   c. L'affichage ci-dessous a été obtenu avec Xcas (disponible ici : `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac_fr.html`).

   ```
   assume(n,integer);additionally(n>0)
                         ( DOM_INT, n )
   integrer(t^n,t,0,1)
                              1
                             ---
                             n+1
   ```

   En déduire que l'on a $\dfrac{1}{3(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$

4. Étudier la convergence de (I_n).