Terminale S_4 – corrigé partiel du devoir à la maison n° 2

EXERCICE 1

$$\boxed{u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1} \text{ et } u_0 = 0}$$

1. c. *Pour tout entier naturel n, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^{n+1}$ (récurrence)*
   - La propriété « $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^{n+1}$ » a été vérifiée pour $n = 0$ précédemment.
   - On suppose que $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
     Comme $u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$ (d'après la question précédente) et $2u_n + 1 > 0$ (puisque $u_n \geqslant 0$) pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - 1$ a le même signe que $-u_n + 1$.
     $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^{n+1}$ donc $u_{n+1} - 1$ a le même signe que $-(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2}$.
     Ainsi, la propriété « $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^{n+1}$ » est récurrente.

   Finalement, pour tout entier naturel n, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^{n+1}$.

   Remarque : on peut déduire de cette propriété que la suite (u_n) n'est pas monotone.

2. $\boxed{v_n = \dfrac{3u_n + 3}{1 - u_n}}$

   a. *Nature de la suite (v_n)*
   Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = \frac{3u_{n+1} + 3}{1 - u_{n+1}} = \frac{3 \times \dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1} + 3}{1 - \dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1}} = \frac{3u_n + 6 + 6u_n + 3}{2u_n + 1 - u_n - 2} = \frac{9u_n + 9}{u_n - 1} = -3 \times \frac{3u_n + 3}{1 - u_n} = -3v_n.$$

   Donc (v_n) est la suite géométrique de raison $q = -3$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{3u_0 + 3}{1 - u_0} = 3$.

   Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = 3 \times (-3)^n$.

   b. *Calcul de u_n en fonction de v_n*
   Pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{3u_n + 3}{1 - u_n}$ donc $v_n(1 - u_n) = 3u_n + 3$ soit $v_n - u_n v_n = 3u_n + 3$ ou encore $(v_n + 3)u_n = v_n - 3$.
   Pour tout entier naturel n, $v_n \neq -3$, car l'équation $3 \times (-3)^n = -3$ soit $(-3)^n = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$, donc, quel que soit l'entier naturel n, $u_n = \dfrac{v_n - 3}{v_n + 3}$.

   c. *Expression de u_n en fonction de n*
   Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3 \times (-3)^n - 3}{3 \times (-3)^n + 3} = \dfrac{(-3)^n - 1}{(-3)^n + 1}$.

   Limite de (u_n)

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n = \frac{(-3)^n \times \left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]}{(-3)^n \times \left[1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n}.$$

   Comme $0 < \left|-\dfrac{1}{3}\right| < 1$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$ donc, en utilisant les théorèmes sur les limites, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} = 1$.

   Remarque : l'expression de u_n trouvée pour calculer sa limite permet de justifier que $u_n \geqslant 0$ pour tout entier naturel n.

Exercice 2

4. *Sur 5 chaudières défectueuses, probabilité qu'au moins l'une d'entre elles soit sous garantie*

   Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de chaudières sous garantie sur les 5 chaudières défectueuses contrôlées.
   Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = P_B(G) = \dfrac{1}{41}$. On a $q = 1 - p = \dfrac{40}{41}$.

   On cherche $P(Y \geqslant 1)$ et on a $P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - q^5$ donc $P(Y \geqslant 1) = 1 - \left(\dfrac{40}{41}\right)^5 = 0{,}116$ à $0{,}001$ près.