Terminale S_4 – devoir à la maison n^{o} 1

À rendre jeudi 19 septembre 2013

EXERCICE 1

Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, $5^{n+2} \geqslant 4^{n+2} + 3^{n+2}$.

EXERCICE 2

On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 5 \text{ avec } u_0 = 4.$$

1. Démonter par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.
2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
   Démontrer la propriété ainsi conjecturée par récurrence.

EXERCICE 3

On définit les suites (a_n) et (b_n) par :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = 12 \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4} \end{cases}.$$

Partie A

1. Calculer a_1, b_1, a_2 et b_2.
2. On considère l'algorithme ci-dessous :

Variables	a, b sont des nombres réels i et n sont des nombres entiers naturels
Initialisation	a prend la valeur 0 b prend la valeur 12 i prend la valeur 0
Traitement	On saisit n Tant que $i < n$ Début du « Tant que » i prend la valeur $i + 1$ a prend la valeur $(2 * a + b)/3$ b prend la valeur $(a + 3 * b)/4$ Fin du « Tant que »
Sortie	Afficher a Afficher b

a. Utiliser l'algorithme pour $n = 2$, recopier le tableau suivant en le remplissant par les résultats obtenus.

n	i	a	b

b. Les valeurs obtenues ne sont pas les bonnes. Proposer une modification de l'algorithme pour qu'il donne les valeurs attendues.

c. Que permet de calculer cet algorithme ?

Partie B

1. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = b_n - a_n$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique. En préciser la raison.
   b. Donner l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.
   c. Déterminer la limite de (u_n).
2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 3a_n + 4b_n$.
   Montrer que la suite (v_n) est constante.
3. En utilisant les égalités $u_n = b_n - a_n$ et $v_n = 3a_n + 4b_n$, montrer que, pour tout entier naturel n :

$$a_n = \frac{v_n - 4u_n}{7} \text{ et } b_n = \frac{3u_n + v_n}{7}.$$

4. Déterminer les expressions de a_n et b_n en fonction de n.
5. Étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n).