Terminales S – corrigé du baccalauréat blanc

Exercice 1 – géométrie dans l'espace

1. *Coordonnées des sommets du cube*
   $A(0\,;\,0\,;\,0)$, $B(1\,;\,0\,;\,0)$, $C(1\,;\,1\,;\,0)$, $D(0\,;\,1\,;\,0)$, $E(0\,;\,0\,;\,1)$, $F(1\,;\,0\,;\,1)$, $G(1\,;\,1\,;\,1)$, $H(0\,;\,1\,;\,1)$.
2. *Représentation paramétrique de* (BH)

   La droite (BH) passe par $B(1\,;\,0\,;\,0)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

   Une représentation paramétrique de (BH) est donc $\begin{cases}x=1-t\\y=t\\z=t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.
3. a. *Alignement de* K, B *et* H

   Le point K a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$.

   On résout $\begin{cases}\dfrac{1}{3}=1-t\\[2pt]\dfrac{2}{3}=t\\[2pt]\dfrac{2}{3}=t\end{cases}$ et on obtient $t=\dfrac{2}{3}$. Donc K est le point de la droite (BH) de paramètre $t=\dfrac{2}{3}$, ainsi les points K, B et H sont alignés.

   b. *Coplanarité de* $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EK}$ *et* $\overrightarrow{ED}$

   $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3}\\[2pt]\dfrac{2}{3}\\[2pt]-\dfrac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

   On cherche le nombres réels a et b tels que $a\overrightarrow{EG}+b\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EK}$. On résout :

   $\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\\[2pt]a+b=\dfrac{2}{3}\\[2pt]-b=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$.

   On obtient $a=\dfrac{1}{3}$ et $b=\dfrac{1}{3}$. On a donc $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{EG}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EK}$. Les vecteurs $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EK}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont donc coplanaires.

   Le point E étant l'origine des trois vecteurs, les points E, G, K et D sont coplanaires.

   c. *Intersection de la droite* (BH) *et du plan* (DGE)

   La droite (BH) n'est pas contenue dans le plan (DGE) car les points E, G, H et B ne sont pas coplanaires.

   Les points B, H et K sont alignés (question 3. a) donc K est un point de la droite (BH).

   Les points E, G, K et D sont coplanaires donc K est un point du plan (DGE).

   La droite (BH) et le plan (DGE) sont donc sécants en K.
4. a. *Vecteur directeur de* d

   Un vecteur directeur de d de représentation paramétrique $\begin{cases}x=1+k\\y=-k\\z=1+2k\end{cases}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

b. *Position relative des droites* d *et* (BH)

On vérifie que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, ainsi les droites d et (BH) ne sont donc pas parallèles.

Pour déterminer si elles sont sécantes, on résout le système $\begin{cases}1-t=1+k\\t=-k\\t=1+2k\end{cases}$ qui est équivalent à $\begin{cases}t=-k\\t=1+2k\end{cases}$ d'où $t=\dfrac{1}{3}$ et $k=-\dfrac{1}{3}$.

Le système a une solution, les deux droites sont donc sécantes. Le point d'intersection I est le point de la droite (BH) de paramètre $t=\dfrac{1}{3}$ et correspond également au point de la droite d de paramètre $k=-\dfrac{1}{3}$.

En utilisant le représentation paramétrique de (BH), ou celle de d, on obtient $I\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$.

5. a. *Nature du triangle* BKG

$BK=\sqrt{(x_K-x_B)^2+(y_K-y_B)^2+(z_K-z_B)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{2}{3}-0\right)^2+\left(\frac{2}{3}-0\right)^2}$

donc $BK=\sqrt{\dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{9}}=\sqrt{\dfrac{12}{9}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. De même, $KG=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ et $GB=\sqrt{2}$.

On en déduit que $GB^2=2$ et que $BK^2+KG^2=\dfrac{12}{9}+\dfrac{6}{9}=2$.

On a donc $GB^2=BK^2+KG^2$ et d'après la réciproque du théorème de PYTHAGORE, le triangle BKG est rectangle en K.

b. *Orthogonalité de la droite* (BK) *et du plan* (DGE)

Le triangle BKG est rectangle en K, donc les droites (BK) et (KG) sont perpendiculaires.
Le triangle BKD est rectangle en K, donc les droites (BK) et (KD) sont perpendiculaires.
De plus, K est un point du plan (DGE).
La droite (BK) est orthogonale à (KG) et (KD), qui sont deux droites sécantes du plan (DGE), la droite (BK) est donc orthogonal au plan (DGE).

EXERCICE 2 – probabilités

Partie A

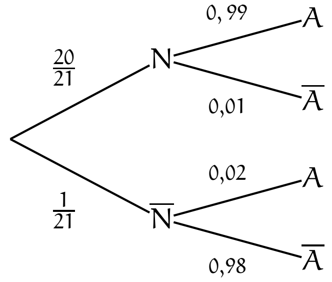
1. *Probabilité qu'une tige soit hors norme*

La probabilité qu'une tige soit hors norme est $P(X<9)+P(X>11)$.
X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[8{,}95\,;\,11{,}05]$, donc :

$$P(X<9)+P(X>11)=P(8{,}95\leqslant X<9)+P(11<X\leqslant 11{,}05)=\frac{9-8{,}95}{11{,}05-8{,}95}+\frac{11{,}05-11}{11{,}05-8{,}95}$$

$$P(X<9)+P(X>11)=\frac{0{,}05}{2{,}1}+\frac{0{,}05}{2{,}1}=\frac{1}{21}=0{,}047\,6 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

2. a. *Arbre pondéré*



b. *Probabilité de* A

Comme $\{N\ ;\ \overline{N}\}$ est un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales on a :

$P(A) = P(N \cap A) + P(\overline{N} \cap A) = \dfrac{1}{21} \times 0{,}99 + \dfrac{20}{21} \times 0{,}02 = \dfrac{991}{1\,050} = 0{,}943\,8$ à 10^{-4} près.

c. *Probabilité qu'une tige acceptée soit hors norme*

On cherche $P_A(\overline{N})$.

$P_A(\overline{N}) = \dfrac{P(A \cap \overline{N})}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{21} \times 0{,}02}{\frac{991}{1\,050}} = \dfrac{1}{991} = 0{,}001\,0$ à 10^{-4} près.

Partie B

1. *Loi suivie par* Y

   La probabilité qu'une tige soit hors norme est 0,047 6. On admet que prendre au hasard un lot de 100 tiges revient à effectuer un tirage avec remise de 100 tiges dans l'ensemble des tiges fabriquées. Donc la variable aléatoire Y qui, à tout lot de 100 tiges, associe le nombre de tiges hors norme, suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}047\,6$.

2. *Espérance mathématique de* Y

   $E(Y) = n \times p = 100 \times 0{,}047\,6 = 4{,}76$.

   En moyenne, sur un lot de 100 tiges, 4,76 tiges sont hors norme.

3. *Probabilité qu'un lot de* 100 *tiges contienne exactement deux tiges hors norme*

   Cette probabilité est égale à $P(Y = 2)$.

   $P(Y = 2) = \binom{100}{2} \times 0{,}047\,6^2 \times (1 - 0{,}047\,6)^{98} = 4\,950 \times 0{,}047\,6^2 \times 0{,}952\,4^{98} = 0{,}094\,2$ à 10^{-4} près.

4. *Probabilité pour qu'un lot de* 100 *tiges contienne au plus une tige hors norme*

   Cette probabilité est égale à $P(Y \leqslant 1)$.

$$\begin{aligned}
P(Y \leqslant 1) &= P(Y = 0) + P(Y = 1)\\
&= \binom{100}{0} \times 0{,}047\,6^0 \times (1 - 0{,}047\,6)^{100} + \binom{100}{1} \times 0{,}047\,6^1 \times (1 - 0{,}047\,6)^{99}\\
&= 0{,}952\,4^{100} + 100 \times 0{,}047\,6 \times 0{,}952\,4^{99}\\
&= 0{,}045\,7 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}
\end{aligned}$$

EXERCICE 3 – fonctions numériques

$\boxed{f(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2} \text{ avec } x \in [-1\ ;\ 1]}$

1. a. *Calcul de la dérivée*

   Pour $x \in]-1\ ;\ 1[$, $x^2 - 1 > 0$ donc la fonction f est dérivable sur $]-1\ ;\ 1[$ et :

$$f'(x) = (-1) \times \sqrt{1 - x^2} + (1 - x) \times \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\sqrt{1 - x^2} - \frac{x(1 - x)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{-\left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2 - x(1 - x)}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-(1 - x^2) - x + x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

   Remarques :

   - On peut démontrer que, pour tout $x \in]-1\ ;\ 1[$, $f'(x) = (-2x - 1)\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$.
   - On peut également démontrer que f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$ mais que f n'est pas dérivable en -1.

b. *Variations de* f

Pour tout $x \in]-1\,;\,1[$, $\sqrt{1-x^2} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ sur $]-1\,;\,1[$ est celui de $2x^2 - x - 1$.

Le trinôme $2x^2 - x - 1$ a deux racines réelles : 1 et $\dfrac{1}{2}$.

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

2. b. *Calcul de* MM'

Dans le triangle OMH rectangle en H, on a $HM^2 = OM^2 - OH^2 = 1 - x^2$ d'après le théorème de PYTHAGORE.

Ainsi $HM = \sqrt{1-x^2}$, donc $MM' = 2HM = 2\sqrt{1-x^2}$.

c. *Calcul de l'aire du triangle* AMM'

$$\text{Aire}(AMM') = \frac{MM' \times AM}{2} = \frac{2\sqrt{1-x^2} \times (1-x)}{2} = \sqrt{1-x^2} \times (1-x) = f(x).$$

d. *Triangle d'aire maximale*

D'après la première question, l'aire du triangle est maximale pour $x = -\dfrac{1}{2}$.

D'après la question 2. b, $MM' = 2\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$.

Par symétrie, on a $AM = AM'$.

De plus $HM = \dfrac{MM'}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc M a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

On en déduit $AM = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$.

Ainsi $MM' = AM = AM' = \sqrt{3}$ donc le triangle d'aire maximale est équilatéral.

EXERCICE 4 – suites numériques

1. *Propriété de la suite* (u_n) *définie par* $u_n = \dfrac{2n+3}{2n+1}$

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$

En effet, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+5}{2n+3} - \frac{2n+3}{2n+1} = \frac{(2n+5)(2n+1) - (2n+3)^2}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{-4}{(2n+3)(2n+1)} < 0.$$

2. *Limite de la suite* (u_n) *définie par* $u_n = \dfrac{1-3^n}{2^n}$

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty.}$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{3^n}{2^n} = \dfrac{1}{2^n} - \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$, car $2 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n = +\infty$, car $\dfrac{3}{2} > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

3. *Propriété de la suite* (u_n) *vérifiant* $u_0 > 0$ *et* $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3}{10}u_n$

   $\boxed{(u_n) \text{ est minorée.}}$

   Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3}{10}u_n + u_n = \dfrac{13}{10}u_n$.

   La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{13}{10} > 1$. Son premier terme étant positif, (u_n) est une suite croissante, (u_n) est donc minorée (par son premier terme u_0).

4. *Suite qui converge vers* 1

   $\boxed{\text{Si } 1 + \dfrac{1}{n^3} < u_n < 1 + \sin\dfrac{1}{n} \text{ alors } (u_n) \text{ converge vers } 1.}$

   $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n^3}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \sin\dfrac{1}{n}\right) = 1 + \sin 0 = 1$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

5. *Opération sur les limites de deux suites*

   $\boxed{\text{Si } \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty \text{ et } \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty \text{ alors } \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n v_n) = -\infty.}$

   C'est un théorème du cours.

Figure de l’exercice 3