Lycée Charles PONCET – CLUSES

BACCALAURÉAT BLANC

FÉVRIER 2014

MATHÉMATIQUES

SÉRIE S

Enseignement spécifique

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES – COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte quatre pages numérotées de 1 à 4.

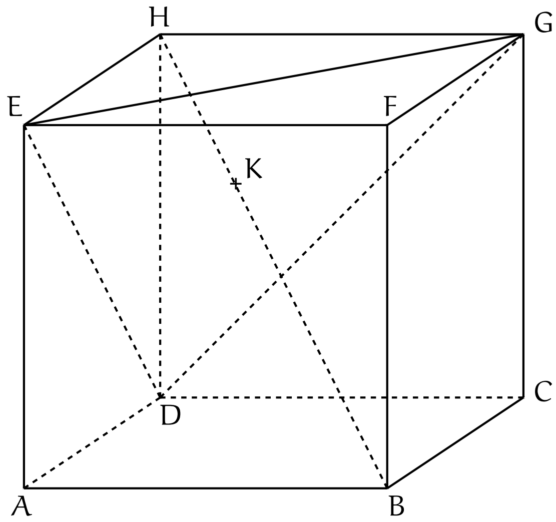
Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 – géométrie dans l'espace (6 points)

Exercice commun à tous les candidats

On considère le cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1, représenté ci-contre et on munit l'espace du repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1. Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BH).
3. Soit K le point de coordonnées $\left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3}\right)$.
   a. Montrer que les points K, B et H sont alignés.
   b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EK}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont coplanaires.
   Que peut-on en déduire ?
   c. En déduire l'intersection de la droite (BH) et du plan (DGE).
4. On considère la droite d dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = \quad -k \\ z = 1 + 2k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
   a. Donner un vecteur directeur de d.
   b. Montrer que les droites d et (BH) ne sont pas parallèles.
   Sont-elles sécantes ? Si la réponse est positive, déterminer les coordonnées du point d'intersection.
5. a. Calculer les distances BK, KG et GB.
   En déduire que le triangle BKG est rectangle.
   b. En admettant que le triangle BKD est rectangle en K, démontrer que la droite (BK) est orthogonal au plan (DGE).

EXERCICE 2 – probabilités (5 points)

Exercice commun à tous les candidats

Un atelier fabrique des tiges cylindriques dont le diamètre est exprimé en millimètres.
Une tige est dite hors norme lorsque son diamètre est inférieur à 9 mm ou supérieur à 11 mm.

Toutes les probabilités de l'exercice seront données à 10^{-4} près.

Partie A

1. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tige choisie au hasard dans la production associe son diamètre exprimé en mm.
   On admet que la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle [8,95 ; 11,05].
   Montrer que la probabilité qu'une tige soit hors norme est égale à 0,047 6 à 10^{-4} près.
2. On met en place un contrôle de production tel que 98 % des tiges hors norme sont écartés et 99 % des tiges correctes sont conservées.
   On choisit une tige au hasard dans la production. On note N l'évènement : « la tige choisie est aux normes », A l'évènement : « la tige choisie est acceptée à l'issue du contrôle ».
   a. Construire un arbre pondéré qui réunit les données de l'énoncé.
   b. Calculer la probabilité de l'évènement A.
   c. Quelle est la probabilité pour qu'une tige acceptée soit hors norme ?

Partie B

Ce contrôle de production se révélant trop coûteux pour l'entreprise, il est abandonné ; dorénavant, toutes les tiges produites sont donc conservées, et elles sont conditionnées par lots de 100 tiges.
On considère que la probabilité qu'une tige soit hors norme est égale à 0,047 6.
On admettra que prendre au hasard un lot de 100 tiges revient à effectuer un tirage avec remise de 100 tiges dans l'ensemble des tiges fabriquées.
On appelle Y la variable aléatoire qui à tout lot de 100 tiges associe le nombre de tiges hors norme de ce lot.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y ?
2. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y. Interpréter le résultat.
3. Quelle est la probabilité pour qu'un lot de 100 tiges contienne exactement deux tiges hors norme ?
4. Quelle est la probabilité pour qu'un lot de 100 tiges contienne au plus une tige hors norme ?

EXERCICE 3 – fonctions numériques (4 points)

Exercice commun à tous les candidats

On considère la fonction numérque f définie pour tout réel $x \in [-1\ ;\ 1]$ par :

$$f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}.$$

1. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Justifier que, pour tout réel $x \in]-1\ ;\ 1[$:

   $$f'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in]-1\ ;\ 1[$ et construire le tableau de variation de f.
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ d'unité graphique 4 cm, on considère le cercle C de centre O et de rayon 1 et les points $A(1\ ;\ 0)$ et $A'(-1\ ;\ 0)$.
   Pour tout réel $x \in]-1\ ;\ 1[$ on considère le point H du segment $[AA']$ d'abscisse x.
   La droite passant H et perpendiculaire à la droite (AA') coupe le cercle C en M et M'.

   a. Construire la figure lorsque $x = \dfrac{1}{4}$ (on rappelle que l'unité graphique est 4 cm).
   La valeur $\dfrac{1}{4}$ ne sert que pour construire la figure.

   b. Justifier que $MM' = 2\sqrt{1-x^2}$.

   c. Déterminer en fonction de x l'aire du triangle AMM'.

   d. En utilisant la première question, pour quelle valeur de x l'aire du triangle AMM' est maximale ?
   Quelle est la nature du triangle d'aire maximale ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 4 – suites numériques (5 points)

Exercice pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour chaque question une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse inexacte ne sera pas sanctionnée. Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Aucune justification n'est demandée.

Le candidat doit recopier sur sa copie la phrase qui correspond à la bonne réponse.

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{2n+3}{2n+1}.$$

Cette suite :
• est croissante ; • est décroissante ; • n'a pas de limite ; • n'est pas monotone.

2. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{1-3^n}{2^n}.$$

Cette suite :
• a pour limite 1 ; • a pour limite $+\infty$; • a pour limite $-\infty$; • a pour limite $\frac{3}{2}$.

3. Soit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 > 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{10} u_n.$$

Cette suite :
• est minorée ; • est convergente ; • est majorée ; • n'a pas de limite.

4. Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n non nul.
Parmi les quatre propositions, indiquer celle qui correspond à une suite qui converge vers 1 :

• $1 + \frac{1}{n^3} < u_n < 1 + \cos\frac{1}{n}$; • $1 + \frac{1}{n^3} < u_n < 1 + \sin\frac{1}{n}$;

• $u_n = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^n}$; • $|u_n + 1| \leqslant \frac{1}{2^n}$.

5. Soit les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors :

• $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = -1$; • $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{(v_n)^2} = 0$;

• $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 0$; • $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = -\infty$.