IRIS 2 – corrigé du devoir en classe n° 2

EXERCICE 1 – recherches d'images et d'originaux

1. *Images par la transformation en $\mathcal{Z}$ des signaux discrets* x_1, x_2, x_3, x_4

$$x_1(n) = n^2 \qquad X_1(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

$$x_2(n) = (-4)^n \qquad X_2(z) = \frac{z}{z+4}$$

$$x_3(n) = (-4)^{n-2}\, e(n-2) = x_2(n-2) \qquad X_3(z) = z^{-2}\, X_2(z) = \frac{1}{z(z+4)}$$

$$x_4(n) = n^2\,(-4)^n = (-4)^n\, x_1(n) \qquad X_4(z) = X_1\left(\frac{z}{-4}\right) = \frac{-4z(z-4)}{(z+4)^3}.$$

2. *Recherche des originaux* y_1, y_2, y_3, y_4

$$(\mathcal{Z}y_1)(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \qquad y_1(n) = r(n) = n$$

$$(\mathcal{Z}y_2)(z) = \frac{z}{5z-6} = \frac{1}{5} \times \frac{z}{z-\frac{6}{5}} \qquad y_2(n) = \frac{1}{5} \times \left(\frac{6}{5}\right)^n$$

$$(\mathcal{Z}y_3)(z) = \frac{1}{5z-6} = z^{-1}\,(\mathcal{Z}y_2)(z) \qquad y_3(n) = y_2(n-1)e(n-1) = \frac{1}{5} \times \left(\frac{6}{5}\right)^{n-1} \times e(n-1)$$

$$(\mathcal{Z}y_4)(z) = \frac{z}{(2z+1)^2} = -\frac{1}{2} \times (\mathcal{Z}y_1)\left(\frac{z}{-\frac{1}{2}}\right) \qquad y_4(n) = -\frac{1}{2} \times r(n) \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n = n \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

EXERCICE 2 – calcul du terme général d'une suite récurrente

$\boxed{x(n+2) = 2x(n) - x(n+1) \text{ avec } x(0) = 2 \text{ et } x(1) = 5}$

1. *Calculs de* $x(2)$, $x(3)$ *et* $x(4)$

   $x(2) = -1$, $x(3) = 11$ et $x(2) = -13$.

2. a. *Transformées de* $n \longmapsto u(n) = x(n+1)$ *et* $n \longmapsto v(n) = x(n+2)$

   On utilise la formule de l'avance :

   - $u(n) = x(n+1)$ donc $(\mathcal{Z}u)(z) = z\left[(\mathcal{Z}x)(z) - x(0)\right] = z\,X(z) - 2z$;
   - $v(n) = x(n+2)$ donc $(\mathcal{Z}v)(z) = z^2\left[(\mathcal{Z}x)(z) - x(0) - z^{-1}x(1)\right] = z^2\,X(z) - 2z^2 - 5z.$

   b. *Calcul de* $X(z)$

   En utilisant la linéarité et la relation de récurrence qui définit le signal x on obtient :

$$\begin{aligned} z^2\,X(z) - 2z^2 - 5z &= 2X(z) - \big(z\,X(z) - 2z\big) \\ z^2\,X(z) - 2z^2 - 5z &= 2X(z) - z\,X(z) + 2z \\ z^2\,X(z) + z\,X(z) - 2X(z) &= 2z^2 + 5z + 2z \\ \big(z^2 + z - 2\big)X(z) &= 2z^2 + 7z. \end{aligned}$$

   Ainsi, pour tout z tel que $|z| > 2$, $X(z) = \dfrac{2z^2 + 7z}{z^2 + z - 2}$.

3. *Décomposition de* $X(z)$

   Pour tout z tel que $|z| > 2$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{3z}{z-1} - \frac{z}{z+2} &= \frac{3z(z+2) - z(z-1)}{(z-1)(z+2)} \\ &= \frac{3z^2 + 6z - z^2 + z}{z^2 - z + 2z - 2} \\ &= \frac{2z^2 + 7z}{z^2 + z - 2} \\ &= X(z).\end{aligned}$$

   Donc, pour tout z tel que $|z| > 2$, $X(z) = \dfrac{3z}{z-1} - \dfrac{z}{z+2}$.

4. *Calcul de* $x(n)$

   Pour tout z tel que $|z| > 2$, on a $X(z) = 3 \times \dfrac{z}{z-1} - \dfrac{z}{z-(-2)}$, donc, pour tout entier n :

$$x(n) = 3e(n) - (-2)^n\, e(n) = \left[3 - (-2)^n\right] e(n).$$

   Finalement, pour tout entier naturel n, $x(n) = 3 - (-2)^n$.

5. *Valeurs de* $x(2)$, $x(3)$ *et* $x(4)$

$$\begin{aligned}x(2) &= 3 - (-2)^2 = 3 - 4 = -1 \\ x(3) &= 3 - (-2)^3 = 3 - (-8) = 3 + 8 = 11 \\ x(4) &= 3 - (-2)^4 = 3 - 16 = -13.\end{aligned}$$