IRIS 2 – corrigé du devoir en classe n° 1

EXERCICE 1 – recherche de la transformée de LAPLACE d'une fonction

$\boxed{f(t) = t\mathscr{U}(t) - (t-2)\mathscr{U}(t-2) \text{ avec } t \in \mathbb{R}}$

1. *Expressions de* f *sur les intervalles* $]-\infty\,;\,0[$, $[0\,;\,2[$ *et* $[2\,;\,+\infty[$

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ t \text{ si } 0 \leqslant t < 2. \\ 2 \text{ si } t \geqslant 2 \end{cases}$$

3. *Image* F *par la transformation de* LAPLACE *de la fonction* f

   Pour tout réel $p > 0$, $F(p) = \dfrac{1 - e^{-2p}}{p^2}$.

EXERCICE 2 – recherches d'images et d'originaux

1. *Images par la transformation de* LAPLACE *des fonctions* g_1, g_2 *et* g_3

$$g_1(t) = \sin(t)\,\mathscr{U}(t) \qquad G_1(p) = \frac{1}{p^2+1}$$

$$g_2(t) = e^{-t}\sin(t)\,\mathscr{U}(t) = g_1(t)e^{-t} \qquad G_2(p) = G_1(p+1) = \frac{1}{p^2+2p+2}$$

$$g_3(t) = e^{-(t-1)}\sin(t-1)\,\mathscr{U}(t-1) = g_2(t-1) \qquad G_3(p) = G_2(p)e^{-p} = \frac{e^{-p}}{p^2+2p+2}.$$

2. *Originaux par la transformation réciproque de* LAPLACE *des fonctions* H_1, H_2 *et* H_3

$$H_1(p) = \frac{1}{p^2} \qquad h_1(t) = t\,\mathscr{U}(t)$$

$$H_2(p) = \frac{1}{(p+1)^2} = H_1(p+1) \qquad h_2(t) = h_1(t)e^{-t} = te^{-t}\,\mathscr{U}(t)$$

$$H_3(p) = \frac{e^{-p}}{(p+1)^2} = H_2(p)e^{-p} \qquad h_3(t) = h_2(t-1) = (t-1)e^{-(t-1)}\,\mathscr{U}(t-1).$$

EXERCICE 3 – résolution d'une équation différentielle avec la transformation de LAPLACE

$\boxed{(E) : x' + 3x = [3\cos(t) - \sin(t)]\,\mathscr{U}(t) \text{ avec } x(0+) = 2}$

1. *Image par la transformation de* LAPLACE *de la fonction* $t \longmapsto \varphi(t) = [3\cos(t) - \sin(t)]\,\mathscr{U}(t)$

   En utilisant le formulaire et la linéarité de la transformation de LAPLACE, l'image de φ est la fonction ϕ définie par $\Phi(p) = \dfrac{3p-1}{p^2+1}$.

2. *Recherche de l'image* X *par la transformation de* LAPLACE *de la solution* x *de l'équation* (E)

   En transformant l'équation (E), on obtient $pX(p) - 2 + 3X(p) = \dfrac{3p-1}{p^2+1}$. On résout et on a, pour tout réel $p > 0$, $X(p) = \dfrac{2p^2+3p+1}{(p^2+1)(p+3)}$.

3. *Décomposition de* $X(p)$

   Par identification, on obtient $a = b = 1$, donc, pour tout réel $p > 0$, $X(p) = \dfrac{1}{p+3} + \dfrac{p}{p^2+1}$.

4. *Expression de* $x(t)$

   La solution cherchée est la fonction x définie sur $\mathbb{R}$ par $x(t) = \mathscr{L}^{-1}(X(p)) = \left[\cos(t) + e^{-3t}\right]\mathscr{U}(t)$.