IRIS 2 – devoir à la maison n° 2

À rendre mercredi 18 décembre 2013

Dans cet exercice, on s'intéresse à un système entrée-sortie.

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$.
On rappelle que la fonction échelon unité $\mathscr{U}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathscr{U}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

On note e l'échelon unité causal discret défini sur l'ensemble des entiers relatifs par :

$$e(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n < 0 \\ 1 \text{ si } n \geqslant 0 \end{cases}$$

Dans ce système entrée-sortie, le signal de sortie est modélisée par une fonction causale s telle que $s(0) = 0$ et vérifiant l'équation différentielle :

$$s'(t) + 2s(t) = 3t\mathscr{U}(t). \tag{1}$$

Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle $y'(t) + 2y(t) = 0$.
2. On considère l'équation différentielle (E) :

$$y'(t) + 2y(t) = 3t.$$

   a. Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = at+b$ soit solution de l'équation (E).

   b. Déterminer la solution générale de l'équation (E).

3. Justifier que, pour tout réel t positif ou nul, on a :

$$s(t) = \frac{3}{2}t - \frac{3}{4}\left(1 - e^{-2t}\right).$$

Partie B

On s'intéresse maintenant à un système d'entrée-sortie numérique destiné à approcher le système analogique étudié dans la partie A. Une discrétisation de l'équation différentielle (1) avec un pas de discrétisation T_e permet d'obtenir, pour tout entier naturel n, la relation suivante :

$$\frac{x(n+1) - x(n)}{T_e} + 2x(n+1) = 3ne(n). \tag{2}$$

On suppose que $x(0) = 0$ et que $T_e = 0{,}1$ seconde.

1. Montrer que la relation (2) s'écrit :

$$12x(n+1) - 10x(n) = 3ne(n). \tag{3}$$

2. Calculer $x(1)$, $x(2)$ et $x(3)$.

3. On suppose que le signal causal discret x possède une transformée en $\mathcal{Z}$ notée X.

   a. Démontrer que, pour tout z tel que $|z| > 1$, on a :

$$X(z) = \frac{3z}{(12z-10)(z-1)^2}.$$

   b. Justifier que, pour tout z tel que $|z| > 1$, on a :

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{9}{z-\frac{5}{6}} + \frac{3}{2(z-1)^2} - \frac{9}{z-1}.$$

   c. En déduire que pour tout entier naturel n on a :

$$x(n) = 9 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n + \frac{3n}{2} - 9.$$

4. Retrouver à l'aide de la formule précédente les valeurs de $x(n)$ pour $n \in \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\}$ et calculer $x(4)$ et $x(5)$ au centième près.