IRIS 2 – devoir à la maison n^{o} 1
À rendre jeudi 17 octobre 2013

Dans cet exercice, on s'intéresse à un système entrée-sortie.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.
Pour les représentations graphiques, vous pouvez utiliser un logiciel de géométrie dynamique comme geogebra disponible ici : `http://www.geogebra.org/cms/fr`.

PARTIE A – étude du système pour une entrée nulle

On considère l'équation différentielle du second ordre (E_1) : $y''(t) + 4y(t) = 0$ où y désigne une fonction de la variable t, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Donner la solution générale de l'équation différentielle (E_1).
2. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle (E_1) qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$.
   Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.

PARTIE B – étude du système soumis à un contrôle

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$.
On rappelle que la fonction échelon unité $\mathscr{U}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathscr{U}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

1. On considère la fonction causale e définie sur l'ensemble des nombres réels par :
   $$e(t) = 2\mathscr{U}(t) - 2\mathscr{U}\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$
   a. Construire la courbe représentative de la fonction e dans un repère orthogonal.
   b. On note E la transformée de LAPLACE de la fonction e. Déterminer $E(p)$.
2. On considère la fonction causale s telle que $4\displaystyle\int_0^t s(u)\,du + s'(t) = e(t)$ et $s\left(0^+\right) = 0$.
   On admet que la fonction s et sa dérivée possèdent chacune une transformée de LAPLACE.
   On note S la transformée de LAPLACE de la fonction s.
   a. Déterminer une expression de $S(p)$.
   b. En déduire une expression de $s(t)$.
3. a. Vérifier que :
   $$s(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ \sin(2t) \text{ si } 0 \leqslant t < \dfrac{\pi}{4} \\ \sin(2t) - \sin\left(2t - \dfrac{\pi}{2}\right) \text{ si } t \geqslant \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$
   b. Établir que $s\left(\dfrac{\pi}{4} - 0\right) = s\left(\dfrac{\pi}{4} + 0\right)$.
   c. Vérifier que pour tout nombre réel t supérieur ou égal à $\dfrac{\pi}{4}$, on a $s(t) = \sqrt{2}\cos\left[2\left(t - \dfrac{\pi}{8}\right)\right]$.
   d. Résoudre l'équation $s(t) = 0$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.
4. Tracer (sur trois figures distinctes) les courbes représentatives sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ des fonctions :
   $$t \longmapsto \cos(2t),\ t \longmapsto \cos\left[2\left(t - \frac{\pi}{8}\right)\right] \text{ et } t \longmapsto s(t).$$