Séries de Fourier*

Section de techniciens supérieurs
Informatique et réseaux pour l'industrie et les services techniques
Lycée Charles Poncet

Janvier 2010

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Calculs des coefficients des séries de Fourier **2**
2.1 Cas d'une fonction de période 2π 2
2.1.1 Calcul de a_0 2
2.1.2 Calcul de a_n et b_n pour $n \geqslant 1$ 3
2.1.3 Conclusion 4
2.2 Cas d'une fonction de période T 4
2.3 Cas particuliers 6
2.3.1 Cas d'une fonction paire 6
2.3.2 Cas d'une fonction impaire 6

3 Conditions de Dirichlet **6**
3.1 Théorèmes 6
3.2 Exemple 7

4 Formule de Parseval **7**
4.1 Théorème 7
4.2 Exemple 7
4.3 Autre écriture de la formule de Parseval 8

5 Forme exponentielle des séries de Fourier **8**
5.1 Calcul des coefficients 8
5.2 Conclusion 9

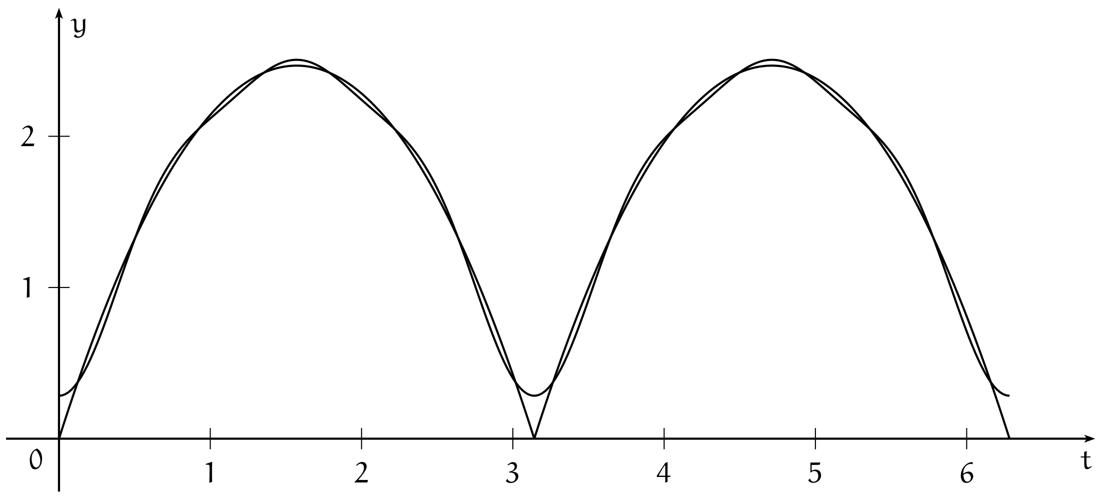
Le symbole ═ indique les exemples à traiter.
Le symbole ☚ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

*Baron Jean-Baptiste Joseph Fourier (Auxerre, 1768 - Paris, 1837) : homme politique, mathématicien et physicien français. En étudiant la propagation de la chaleur, il découvrit les séries trigonométriques qui portent son nom. Il fut aussi professeur à l'École Polytechnique, membre de l'Académie des sciences et membre de l'Académie française.

1 Introduction

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période π telle que, pour tout $t \in [0\,;\,\pi[$, $f(t) = t(\pi - t)$.
Il est intéressant en physique (électricité, électronique, mécanique...) de trouver une somme de fonctions sinuoïdales qui « approche » certaines fonctions périodiques.

On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \dfrac{\pi^2}{6} - \cos 2t - \dfrac{\cos 4t}{4} - \dfrac{\cos 6t}{9}$.
En représentant f et g sur l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$ (cf. la figure ci-dessous), on constate que g est une « bonne approximation » de la fonction f.



Le but de ce chapitre est de développer certaines fonctions périodiques en séries trigonométriques, appelées *séries de* FOURIER.

2 Calculs des coefficients des séries de FOURIER

2.1 Cas d'une fonction de période 2π

Considérons la série $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$, et supposons que cette série converge (pour certaines valeurs de t). Pour les valeurs de t pour lesquelles cette série converge on pose :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt). \tag{1}$$

Connaissant la fonction f, périodique de période 2π, on veut calculer les coefficients a_0, a_n et b_n (pour $n \geqslant 1$).

2.1.1 Calcul de a_0

On suppose que la série définie par l'égalité (1) converge pour tout $t \in \mathbb{R}$, on peut alors intégrer les deux membres de l'égalité 1 sur l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$ et on obtient :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} a_0\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \right] dt. \tag{2}$$

On supposera dans la suite du chapitre que les fonctions utilisées vérifieront l'égalité :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)\, dt \right) \quad (\textit{intégration terme à terme}).$$

Dans ces conditions, l'égalité (2) devient :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} a_0\, dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\, dt \right]. \tag{3}$$

Or $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} a_0\, dt = \left[a_0 x\right]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi a_0$ et $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\, dt = \left[\frac{a_n}{n} \sin nt - \frac{b_n}{n} \cos nt \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$ car $\sin n\pi = \sin(-n\pi) = 0$ et $\cos n\pi = \cos(-n\pi) = (-1)^n$. L'égalité (3) s'écrit donc :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 2\pi a_0.$$

On a donc :

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt}.$$

Cela signifie que a_0 est la *valeur moyenne* de f sur l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$.

2.1.2 Calcul de a_n et b_n pour $n \geqslant 1$

Soit p un entier naturel non nul. On suppose encore que la série définie par l'égalité 1 converge pour tout $t \in \mathbb{R}$. On calcule alors les deux intégrales :

$$I(p) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos pt\, dt \quad \text{et} \quad J(p) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin pt\, dt.$$

En utilisant la définition de f, égalité (1), et en supposant que l'on peut intégrer terme à terme, on obtient :

$$I(p) = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos pt\, dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos pt\, dt + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos pt\, dt \right) \tag{4}$$

$$J(p) = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \sin pt\, dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \sin pt\, dt + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin pt\, dt \right). \tag{5}$$

Or, pour tout entier naturel $p \geqslant 1$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos pt\, dt = 0$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin pt\, dt = 0$ et $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos pt\, dt = 0$.

D'autre part, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos pt\, dt = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq p \\ \pi \text{ si } n = p \end{cases}$ et $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin pt\, dt = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq p \\ \pi \text{ si } n = p. \end{cases}$

$\Rightarrow$ Démontrer ces résultats en utilisant les formules de linéarisation.

En utilisant ces résultats et les égalités (4) et (5), on obtient :

$$I(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq n \\ \pi a_n & \text{si } p = n \end{cases} \quad \text{et} \quad J(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq n \\ \pi b_n & \text{si } p = n. \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\, dt}.$$

2.1.3 Conclusion

Théorème 2.1.1
Pour une fonction f*, périodique de période* 2π*, intégrable sur* $[-\pi\,;\,\pi]$*, on a :*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt.$$

Définition 2.1.1
Les nombres a_n *et* b_n *sont les coefficients de* FOURIER *de la fonction* f.
$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nt + b_n \sin nt)$ *est le développement en série de* FOURIER *de* f.

- On considère la fonction f périodique de période 2π telle que $f(t) = \begin{cases} -1 \text{ si } t \in [-\pi\,;\,0[\\ 1 \text{ si } t \in [0\,;\,\pi[. \end{cases}$
  Représenter graphiquement f sur $[-2\pi\,;\,2\pi[$.
  Calculer les coefficients de FOURIER de f.
  Quel est le développement en série de FOURIER de f ?

Pour une fonction φ, périodique de période 2π on a : $\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,dt = \int_{a}^{a+2\pi}\varphi(t)\,dt$, quel que soit le nombre réel a (à condition que l'on puisse calculer ces deux intégrales), donc les coefficients de FOURIER de f peuvent s'écrire :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(t)\,dt, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(t)\cos nt\,dt \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(t)\sin nt\,dt.$$

En particulier :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(t)\,dt, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt.$$

2.2 Cas d'une fonction de période T

Soit f une fonction de période $T > 0$. On pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et $t = \frac{T}{2\pi}u = \frac{u}{\omega}$. On considère alors la fonction g définie par $g(u) = f\left(\frac{T}{2\pi}u\right) = f(t)$. On a alors :

$$\begin{aligned} g(u+2\pi) &= f\left(\frac{T}{2\pi}(u+2\pi)\right) \\ &= f\left(\frac{T}{2\pi}u + T\right). \end{aligned}$$

Or f est périodique de période T, donc :

$$\begin{aligned} g(u+2\pi) &= f\left(\frac{T}{2\pi}u\right) \\ &= g(u). \end{aligned}$$

g est donc périodique de période 2π. En supposant que cette fonction soit développable en série de FOURIER, on peut écrire :

$$f(t) = g(u) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nu + b_n\sin nu). \tag{6}$$

Or $u = \omega t$ car $t = \dfrac{u}{\omega}$, donc l'égalité 6 s'écrit :

$$f(t) = g(\omega t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t).$$

On a obtenu :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)\,du \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)\cos nu\,du \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)\sin nu\,du.$$

En utilisant le changement de variable $t = \dfrac{u}{\omega}$, on a $u = \omega t$ et $du = \omega\,dt$, de plus, si $u = -\pi$ alors $t = -\dfrac{\pi}{\omega} = -\dfrac{T}{2}$ et si $u = \pi$ alors $t = \dfrac{\pi}{\omega} = \dfrac{T}{2}$, d'où :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\omega\,dt & a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t\,\omega\,dt & b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t\,\omega\,dt \\ &= \frac{\omega}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt & &= \frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\ \cos n\omega t\,dt & &= \frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\ \sin n\omega t\,dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt & &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\ \cos n\omega t\,dt & &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\ \sin n\omega t\,dt. \end{aligned}$$

Théorème 2.2.1
Pour une fonction f*, périodique de période* $T > 0$*, intégrable sur* $\left[-\dfrac{T}{2}\,;\ \dfrac{T}{2}\right]$*, on a :*

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt, \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\ \cos n\omega t\,dt \quad \textit{et} \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\ \sin n\omega t\,dt, \quad \textit{avec}\ \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Définition 2.2.1
Les nombres a_n *et* b_n *sont les coefficients de* FOURIER *de la fonction* f*.*
$a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$ *est le développement en série de* FOURIER *de* f*.*

Comme précédemment les coefficients de FOURIER de f peuvent s'écrire :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{a}^{a+T} f(t)\,dt, \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_{a}^{a+T} f(t)\cos n\omega t\,dt \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{a}^{a+T} f(t)\sin n\omega t\,dt.$$

En particulier :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)\,dt, \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_{0}^{T} f(t)\cos n\omega t\,dt \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{0}^{T} f(t)\sin n\omega t\,dt.$$

➡ On considère la fonction f périodique de période π telle que $f(t) = t$ sur $[0\,;\ \pi[$.
Représenter graphiquement f sur $[-3\pi\,;\ 3\pi[$.
Calculer les coefficients de FOURIER de f.
Quel est le développement en série de FOURIER de f ?

2.3 Cas particuliers

2.3.1 Cas d'une fonction paire

Soit f une fonction périodique de période $T > 0$, développable en série de FOURIER et paire. On considère la fonction f_1 définie par $f_1(t) = f(t)\sin n\omega t$, alors :

$$f_1(-t) = f(-t)\sin(-n\omega t) = -f(t)\sin n\omega t = -f_1(t).$$

f_1 est impaire donc :

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t)\,dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t\,dt = 0.$$

Dans le développement en série de FOURIER de f tous les coefficients b_n sont nuls.
De plus la fonction f_2 définie par $f_2(t) = f(x)\cos n\omega t$ est paire donc :

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_2(t)\,dt = 2\int_0^{\frac{T}{2}} f_2(t)\,dt = 2\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t\,dt.$$

On a donc :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\ \cos n\omega t\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\ \cos n\omega t\,dt$$

et

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt.$$

Théorème 2.3.1
Si f est une fonction périodique de période $T > 0$ et paire alors pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, $b_n = 0$. De plus $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt$ et pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\ \cos n\omega t\,dt$.

2.3.2 Cas d'une fonction impaire

On démontre de même :

Théorème 2.3.2
Si f est une fonction périodique de période $T > 0$ et impaire alors pour tout nombre entier $n \geqslant 0$, $a_n = 0$. De plus, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, $b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\ \sin n\omega t\,dt$.

3 Conditions de DIRICHLET [1]

3.1 Théorèmes

Théorème 3.1.1 (conditions de DIRICHLET)
Une fonction f est développable en série de FOURIER si :
- *f est périodique ;*
- *f est continue et dérivable sauf en un nombre fini de points par période ;*
- *f et f' admettent des limites à gauche et à droite finies en tout point.*

Théorème 3.1.2 (théorème de DIRICHLET)
Soit f une fonction satisfaisant au théorème 3.1.1 (conditions de DIRICHLET) alors :
- *en tout point t_0 où f est continue, la série de FOURIER converge vers $f(t_0)$;*

[1] Gustav LEJEUNE DIRICHLET (1805-1859), mathématicien allemand.

– *en tout point* t_0 *où* f *n'est pas continue, la série de* FOURIER *converge vers :*

$$\frac{f(t_0+0)+f(t_0-0)}{2}=\frac{f(t_0^+)+f(t_0^-)}{2}$$

$$\textit{avec } f(t_0+0)=f(t_0^+)=\lim_{\substack{t\to t_0\\ t>t_0}} f(t) \textit{ et } f(t_0-0)=f(t_0^-)=\lim_{\substack{t\to t_0\\ t<t_0}} f(t).$$

3.2 Exemple

On reprend l'exemple du paragraphe 2.1.3 :

On considère la fonction f périodique de période 2π telle que $f(t)=\begin{cases}-1 \text{ si } t\in[-\pi\,;\,0[\\ 1 \text{ si } t\in[0\,;\,\pi[.\end{cases}$

On a obtenu pour série de FOURIER de f la série :

$$\frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\sin(2p+1)t}{2p+1}.$$

⇒ Démontrer que f satisfait aux conditions de DIRICHLET et appliquer le théorème de DIRICHLET pour $t=\dfrac{\pi}{2}$.

En déduire que la série de terme général $u_p=\dfrac{(-1)^p}{2p+1}$ converge et donner la valeur de sa somme.

4 Formule de PARSEVAL[2] ou de BESSEL[3]-PARSEVAL

4.1 Théorème

Théorème 4.1.1 (formule de PARSEVAL ou de BESSEL-PARSEVAL)

Soit f *une fonction périodique de période* $T>0$ *satisfaisant au théorème 3.1.1 (conditions de* DIRICHLET*) et dont le développement en série de* FOURIER *est :*

$$a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)\quad \textit{avec } \omega=\frac{2\pi}{T}.$$

Alors :

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f^2(t)\,dt=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

Définition 4.1.1

Le nombre $f_{\text{eff}}^2=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f^2(t)\,dt$ *est le carré de la* valeur efficace *de* f *sur une période.*

4.2 Exemple

On reprend l'exemple des paragraphes 2.1.3 et 3.2 :

On considère la fonction f périodique de période 2π telle que $f(t)=\begin{cases}-1 \text{ si } t\in[-\pi\,;\,0[\\ 1 \text{ si } t\in[0\,;\,\pi[.\end{cases}$

On a démontrer que, pour tout $t\in]-\pi\,;\,\pi[$, $f(t)=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\sin(2p+1)t}{2p+1}$.

⇒ Calculer $I=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt$.

En utilisant le théorème 4.1.1 (formule de PARSEVAL), démontrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

[2]Marc Antoine PARSEVAL *dit* PARSEVAL-DESCHÊNES (1755-1836), mathématicien français.
[3]Friedrich Wilhelm BESSEL (1794-1846), astronome allemand.

4.3 Autre écriture de la formule de PARSEVAL

Quel que soient les nombres réels a, b et u (a et b n'étant pas simultanément nuls) :

$$a\cos u + b\sin u = A\cos(u-\varphi) \quad \text{avec} \quad A = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Théorème 4.3.1
Soit f *une fonction périodique de période* $T > 0$ *satisfaisant au théorème 3.1.1 (conditions de* DIRICHLET*). Le développement en série de* FOURIER *de* f *peut s'écrire* $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t - \varphi_n)$ *avec :*

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \; A_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2}, \; \cos\varphi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} \; \text{ et } \; \sin\varphi_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}.$$

La formule de PARSEVAL *s'écrit :*

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f^2(t)\,dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2.$$

5 Forme exponentielle des séries de FOURIER

5.1 Calcul des coefficients

Soit f une fonction périodique de période $T > 0$ développable en série de FOURIER dont le développement est :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \;\text{ avec }\; \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

En utilisant les formules d'EULER on obtient :

$$\begin{aligned} a_n\cos n\omega t + b_n \sin n\omega t &= a_n\,\frac{e^{in\omega t}+e^{-in\omega t}}{2} + b_n\,\frac{e^{in\omega t}-e^{-in\omega t}}{2i} \\ &= \frac{a_n - ib_n}{2}\,e^{in\omega t} + \frac{a_n+ib_n}{2}\,e^{-in\omega t}. \end{aligned}$$

Calcul de $\dfrac{a_n - ib_n}{2}$

En utilisant les expressions de a_n et b_n (cf. théorème 2.2.1), on obtient, pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} a_n - ib_n &= \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos n\omega t\,dt - i\frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin n\omega t\,dt \\ &= \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\,[\cos n\omega t - i\sin n\omega t]\,dt. \end{aligned}$$

Or $\cos n\omega t - i\sin n\omega t = e^{-in\omega t}$, d'où $\dfrac{a_n - ib_n}{2} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,e^{-in\omega t}\,dt$ pour tout $n \geqslant 1$.

Calcul de $\dfrac{a_n + ib_n}{2}$

En procédant de même on obtient $\dfrac{a_n + ib_n}{2} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\, e^{in\omega t}\, dt$ pour tout $n \geqslant 1$.

On peut donc écrire $\dfrac{a_n - ib_n}{2}$ et $\dfrac{a_n + ib_n}{2}$ avec une seule formule en posant, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \text{ et } c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

Donc, quel que soit $n \in \mathbb{Z}^*$:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt.$$

Or, en utilisant cette formule pour $n = 0$ on obtient :

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\, e^0\, dt = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\, dt = a_0.$$

On peut alors écrire :

$$a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t = c_n\, e^{in\omega t} + c_{-n}\, e^{-in\omega t}.$$

La série de FOURIER de f peut alors s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(c_n\, e^{in\omega t} + c_{-n}\, e^{-in\omega t}) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, e^{in\omega t} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}\, e^{-in\omega t} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, e^{in\omega t} + \sum_{p=-1}^{-\infty} c_p\, e^{ip\omega t} \\
&= \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{in\omega t}.
\end{aligned}$$

On a obtenu la *forme complexe* du développement en série de FOURIER de f.

5.2 Conclusion

Théorème 5.2.1 (forme complexe du développement en série de FOURIER)
Si f est une fonction périodique de période $T > 0$ satisfaisant aux conditions de DIRICHLET, *le développement en série de* FOURIER *de f peut s'écrire :*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{in\omega t} \;\textit{ avec }\; c_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\, e^{-in\omega t} dt \;\textit{ et }\; \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

✏ On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période π telle que, quel que soit $t \in [0\,;\,\pi[$, $f(t) = t(\pi - t)$ (exemple du paragraphe 1).
Montrer que f vérifie les conditions de DIRICHLET.
Montrer que, quel que soit $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{\pi^2}{6} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \dfrac{e^{-2int}}{n^2}$ (calculer c_0 puis c_n en utilisant deux intégrations par parties successives).
En déduire que, quel que soit $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{\pi^2}{6} - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos 2nt}{n^2}$, puis que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.