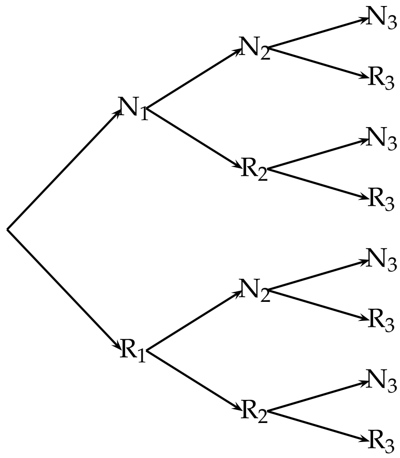
Objectifs : Dernier devoir à la maison de l'année, histoire de voir si vous avez tout compris sur les probabilités conditionnelles.

EXERCICE - 1

On considère trois urnes U_1, U_2, et U_3.
L'urne U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges ; l'urne U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges ; l'urne U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges.
Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et une boule de U_2, à les mettre dans U_3, puis à tirer au hasard une boule de U_3.
Pour i prenant les valeurs 1, 2 et 3, on désigne par N_i, (respectivement R_i) l'évènement « on tire une boule noire de l'urne U_i » (respectivement « on tire une boule rouge de l'urne U_i »).

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités suivant :



2. a) Calculer la probabilité des évènements $N_1 \cap N_2 \cap N_3$, et $N_1 \cap R_2 \cap N_3$.
   b) En déduire la probabilité de l'évènement $N_1 \cap N_3$.
   c) Calculer de façon analogue la probabilité de l'évènement $R_1 \cap N_3$.
3. Déduire de la question précédente la probabilité de l'évènement N_3.
4. Les évènements N_1 et N_3 sont-ils indépendants ?
5. Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

EXERCICE - 2

Un employé se rend à son travail. S'il est à l'heure il prend le bus de ramassage gratuit mis à disposition par l'entreprise, s'il est en retard il prend le bus de la ville.

- Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{5}$, s'il est en retard un jour donné la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{20}$.
- Pour tout entier naturel non nul n, on appelle R_n l'évènement : « l'employé est en retard le jour n ». On note p_n, la probabilité de R_n et q_n, celle de $\overline{R_n}$. On suppose que $p_1 = 0$.

1. **Détermination d'une relation de récurrence.**
   a) Déterminer les probabilités conditionnelles $p_{R_n}(R_{n+1})$ et $p_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$.
   b) Déterminer $p(R_{n+1} \cap R_n)$ en fonction de p_n et $p\left(R_{n+1} \cap \overline{R_n}\right)$ en fonction de q_n.
   c) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et de q_n.
   d) En déduire que $p_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20}p_n$.
2. **Etude de la suite (p_n).**

   Pour tout entier naturel non nul n, on pose $v_n = p_n - \frac{4}{23}$.

   a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{20}$.
   b) Exprimer v_n puis p_n en fonction de n.
   c) Justifier que la suite (p_n) est convergente et calculer sa limite.