Exercice 1

• Complexes : équations et interprétation géométrique

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

1. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation (1) :* $\dfrac{z-2}{z-1} = z$.
On donnera le module et un argument de chaque solution.

On a :

$$\frac{z-2}{z-1} = z \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \\ \text{et} \\ z-2 = z(z-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \\ \text{et} \\ z^2 - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

Résolution de l'équation $\mathscr{E}_1$ **:** $z^2 - 2z + 2 = 0$

On a : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 = -4 = (2\mathrm{i})^2$

$\mathscr{E}_1$ admet donc deux solutions

$z_1 = \dfrac{2+2\mathrm{i}}{2} = 1 + \mathrm{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1 - \mathrm{i}$

z_1 et z_2 sont différents de 1 d'où

$\boxed{\mathscr{S} = \{1+\mathrm{i}; 1-\mathrm{i}\}}$

et

$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right]; \left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right]\right\}}$

2. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation (2) :* $\dfrac{z-2}{z-1} = i$.
On donnera la solution sous forme algébrique.

$$\frac{z-2}{z-1} = \mathrm{i} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \\ \text{et} \\ z-2 = \mathrm{i}(z-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \\ \text{et} \\ z(1-\mathrm{i}) = 2-\mathrm{i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \text{ et } z \neq \mathrm{i} \\ \text{et} \\ z = \dfrac{2-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \end{cases}$$

Or $\dfrac{2-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{(2-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \dfrac{3+\mathrm{i}}{2}$

$\dfrac{3+\mathrm{i}}{2}$ est différent de 1 et de i d'où

$\boxed{\mathscr{S}' = \left\{\frac{3+\mathrm{i}}{2}\right\}}$

3. *Soit M, A et B les points d'affixes respectives : z, 1 et 2. On suppose que M est distinct des points A et B.*

a. *Interpréter géométriquement le module et un argument de* $\dfrac{z-2}{z-1}$.

On a :

$\dfrac{z-2}{z-1} = \dfrac{z_M - z_B}{z_M - z_A}$

Ainsi

$\left|\dfrac{z-2}{z-1}\right| = \left|\dfrac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right| = \dfrac{|z_M - z_B|}{|z_M - z_A|} = \dfrac{BM}{AM}$

et

$$\begin{aligned} arg\left(\frac{z-2}{z-1}\right) &= arg\left(\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right) \\ &= \left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}\right) + 2k\pi \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\left|\frac{z-2}{z-1}\right| = \frac{BM}{AM} \\ &arg\left(\frac{z-2}{z-1}\right) = \left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}\right) + 2k\pi \end{aligned}}$$

b. *Retrouver géométriquement la solution de l'équation (2).*

On a

$$\frac{z-2}{z-1} = \mathrm{i} \Leftrightarrow \frac{z_M - z_B}{z_M - z_A} = \left[1; \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{BM}{AM} = 1 \\ \text{et} \\ \left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{et} \\ M \neq A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ appartient à la médiatrice de}[AB] \\ \text{et} \\ \text{Le triangle AMB est rectangle direct en M} \end{cases}$$

> La solution de l'équation (2) est donc l'affixe du point M intersection de la médiatrice de [AB] et du cercle de diamètre [AB] tel que le triangle AMB soit direct en M.

4. a. *Montrer, à l'aide d'une interprétation géométrique, que toute solution de l'équation dans* $\mathbb{C}$ *:*

$$\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = i,$$

où n désigne un entier naturel non nul donné, a pour partie réelle $\dfrac{3}{2}$.

Si

$$\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = \mathrm{i},$$

alors

$$\left|\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n\right| = |\mathrm{i}|$$

et

$$\left(\left|\frac{z-2}{z-1}\right|\right)^n = 1$$

donc

$$\left|\frac{z-2}{z-1}\right| = 1$$

et avec les notations de la question précédente,

$$\left|\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right| = 1$$

donc $\dfrac{BM}{AM} = 1$

d'où M appartient à la médiatrice de [AB].

Or A a pour affixe 1 et B a pour affixe 2 donc la médiatrice de [AB] a pour équation $x = \dfrac{3}{2}$ et ainsi z a pour partie réelle $\dfrac{3}{2}$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Toute solution de l'équation dans } \mathbb{C} : \\ \qquad \left(\dfrac{z-2}{z-1}\right)^n = \mathrm{i}, \\ \text{où } n \text{ désigne un entier naturel non nul donné, a pour} \\ \text{partie réelle } \dfrac{3}{2}.\end{array}}$$

b. *Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (3) : $\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right)^2 = i$.*
On cherchera les solutions sous forme algébrique.
1 n'est pas solution de (3) donc $z - 1 \neq 0$ et on a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = \mathrm{i} &\Leftrightarrow (z-2)^2 = \mathrm{i}(z-1)^2 \\ &\Leftrightarrow z^2(1-\mathrm{i}) + z(-4+2\mathrm{i}) + 4 - \mathrm{i} = 0 \end{aligned}$$

Or, si z est solution de (3), alors $z = \dfrac{3}{2} + \mathrm{i}y$ avec $y \in \mathbb{R}$.

On a donc

$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow (\frac{3}{2}+\mathrm{i}y)^2(1-\mathrm{i}) + (\frac{3}{2}+\mathrm{i}y)(-4+2\mathrm{i}) + 4 - \mathrm{i} = 0 \\ &\Leftrightarrow -y^2 + y + \frac{1}{4} + \mathrm{i}(y^2 - y + \frac{1}{4}) = 0 \\ &\Leftrightarrow (-1+\mathrm{i})(y^2 - y + \frac{1}{4}) = 0 \\ &\Leftrightarrow y^2 - y + \frac{1}{4} = 0 \end{aligned}$$

Or $\Delta = 2$
d'où
$y = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ ou $y = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$.
Ainsi

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{1+\sqrt{2}}{2} ; \frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right\}}$$

Une remarque pour les curieux :
► avec Maple vous taper bêtement "solve(((z-2) ⁄ (z-1)) ^2=I)" et ...
► avec Xcas (libre et gratuit!) vous taper bêtement "normal(resoudre _ dans _ C(((x-2) ⁄ (x-1)) ^2=i))" et ...

Exercice 2

- fonction ln
- Intégrale et suite

1. *Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f_n(x) = \ln x + \dfrac{x}{n} - 1$.*

a. *Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$ puis étudier le sens de variations de f_n.*

On a :

$\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{n} = 0$, ainsi

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = -\infty.}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et, n étant strictement positif $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{n} = +\infty$, ainsi

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty.}$

La fonction f_n est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et

$f_n'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{n}$.

Sur $]0\,;+\infty[$, $f_n'(x) > 0$

$\boxed{\text{Les fonctions } f_n \text{ sont donc strictement croissantes.}}$

b. *Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0\,;+\infty[$. On note α_n cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle $[1\,;\mathrm{e}]$.*

La fonction f_n est continue comme somme de fonctions continues et est strictement croissante.

De plus $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

Ainsi f_n réalise une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $]-\infty\,;+\infty[$ et

$\boxed{\text{il existe un réel unique } \alpha_n \in]0\,;+\infty[\text{ tel que } f_n(\alpha_n) = 0.}$

(Pour le bac, un tableau de variation bien fait suffit!)

De plus, $f_n(1) = \dfrac{1}{n} - 1 < 0$ et $f_n(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{n} > 0$, ainsi

$\boxed{1 < \alpha_n < \mathrm{e}.}$

2. *Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$. On note (Γ) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.*

a. *Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées $(0\,;1)$ et le point B_n de coordonnées $(n\,;0)$.*

Δ_n passe par $\mathrm{A}(0\,;1)$, son équation est donc de la forme : $y = mx + 1$.

Elle passe par le point $B_n\ (n\,;0)$, on obtient $0 = an + 1$ et ainsi $a = -\dfrac{1}{n}$.

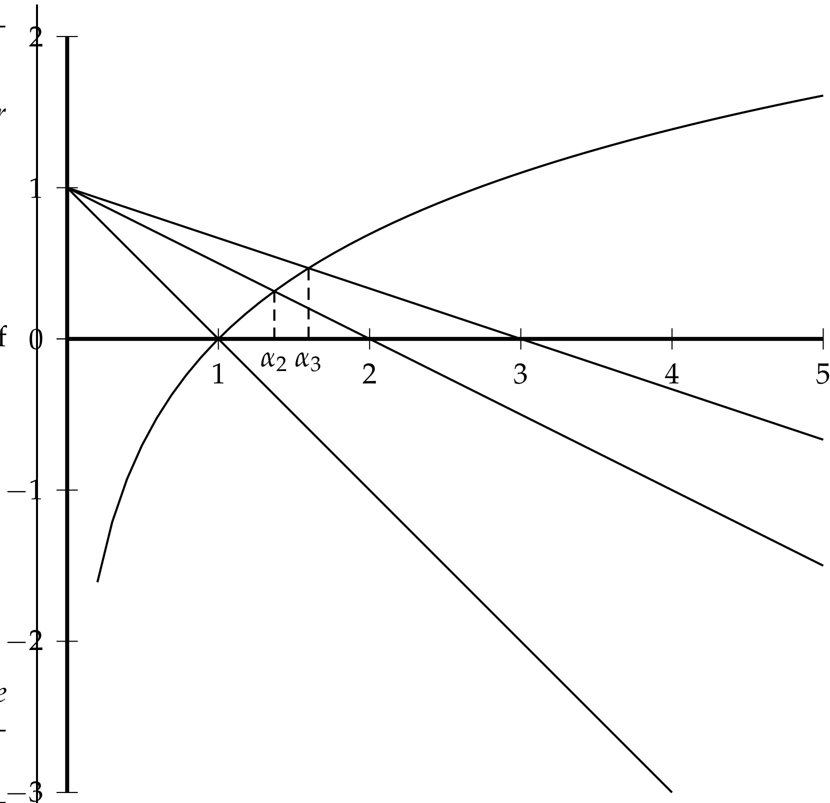
$\boxed{\Delta_n : y = -\dfrac{1}{n}x + 1}$

b. *Faire un croquis représentant la courbe (Γ) et les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3.*

$\Delta_1 \quad y = -x + 1$

$\Delta_2 \quad y = -\dfrac{1}{2}x + 1$

$\Delta_1 \quad y = -\dfrac{1}{3}x + 1$



c. *Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de (Γ) avec Δ_n.*

Soit $\mathrm{M}(x;y)$ le point commun à Γ et Δ_n.

On a donc

$$\begin{aligned} \ln x = -\frac{1}{n}x + 1 &\iff \ln x + \frac{1}{n}x - 1 = 0 \\ &\iff f_n(x) = 0 \\ &\iff x = \alpha_n \end{aligned}$$

$\boxed{\alpha_n \text{ est l'abscisse du point d'intersection de } (\Gamma) \text{ avec } \Delta_n}$

d. *Préciser la valeur de α_1 puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (α_n).*

α_1 est l'unique solution de $\ln x + x - 1 = 0$.

Or 1 est une solution évidente de $\ln x + x - 1 = 0$.

Ainsi $\boxed{\alpha_1 = 1.}$

D'après le croquis la suite (α_n) semble croissante.

3. a. *Exprimer $\ln(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n.*

On a $\ln \alpha_n + \dfrac{\alpha_n}{n} - 1 = 0$

Donc $\boxed{\ln \alpha_n = 1 - \dfrac{\alpha_n}{n}.}$

b. *Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n et vérifier que : $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.*

On a :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\alpha_n) &= \ln \alpha_n + \frac{\alpha_n}{n+1} - 1 \\ &= 1 - \frac{\alpha_n}{n} + \frac{\alpha_n}{n+1} - 1 \\ &= \frac{\alpha_n}{n+1} - \frac{\alpha_n}{n} \\ &= \frac{n-n-1}{n(n+1)}\alpha_n \\ &= -\frac{\alpha_n}{n(n+1)} \end{aligned}$$

$$\boxed{f_{n+1}\left(\alpha_n\right) = -\frac{\alpha_n}{n(n+1)}}$$

α_n est un réel strictement positif, ainsi $\boxed{f_{n+1}\left(\alpha_n\right) < 0}$

c. *Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (α_n).*

On a $f_{n+1}\left(\alpha_{n+1}\right) = 0$.

Ainsi $f_{n+1}\left(\alpha_n\right) < f_{n+1}\left(\alpha_{n+1}\right)$.

De plus les fonctions f_n sont strictement croissantes.

Ainsi $\alpha_n < \alpha_{n+1}$.

$\boxed{\text{La suite } (\alpha_n) \text{ est donc croissante.}}$

d. *Montrer que la suite (α_n) converge. On note ℓ sa limite. Etablir que : $\ln \ell = 1$ et en déduire la valeur de ℓ.*

La suite (α_n) est croissante et majorée par e :

$\boxed{\text{elle est donc convergente vers un réel } \ell \leqslant \text{e.}}$

On a $0 \leqslant \dfrac{\alpha_n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 0$

Or $\ln \alpha_n = 1 - \dfrac{\alpha_n}{n}$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln \alpha_n = 1$

et, la fonction ln étant continue,

$\ln\left(\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \alpha_n\right) = 1$

et $\ln \ell = 1$

d'où

$\boxed{\ell = \text{e.}}$

4. *On désigne par $\mathcal{D}_n$ le domaine délimité par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = \alpha_n$ et $x = \text{e}$.*

a. *Calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}_n$ en fonction de α_n et montrer que cette aire est égale à $\dfrac{\alpha_n^2}{n}$.*

$\alpha_1 = 1$ et la suite (α_n) est croissante donc pour tout n, $1 \leqslant \alpha_n \leqslant \text{e}$ et sur l'intervalle $[\alpha_n\,;\,\text{e}]$, ln est positive.

Donc $\mathcal{A}\left(\mathcal{D}_n\right) = \displaystyle\int_{\alpha_n}^{\text{e}} \ln x \,\text{d}x = \int_{\alpha_n}^{\text{e}} 1 \times \ln x \,\text{d}x$.

On pose

$$\begin{cases} u'(x) = 1 & u(x) = x \\ v(x) = \ln x & v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

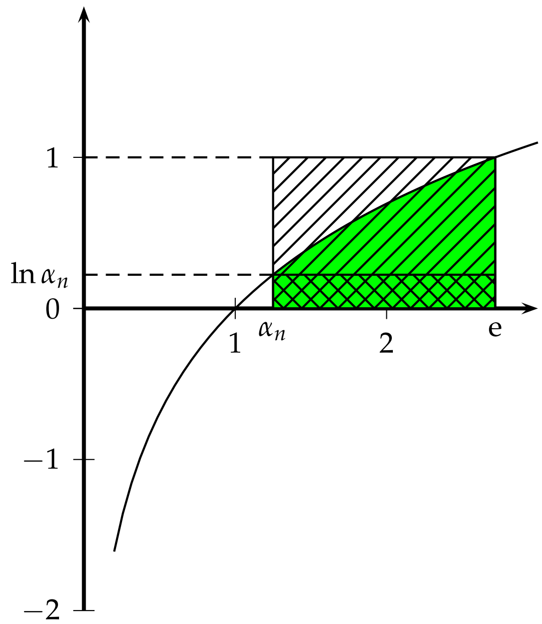
u et v sont deux fois dérivables donc par une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}\left(\mathcal{D}_n\right) & = & [x \ln x]_{\alpha_n}^{\text{e}} - \displaystyle\int_{\alpha_n}^{\text{e}} x \times \frac{1}{x}\,\text{d}x \\ & = & \text{e} - \alpha_n \ln \alpha_n - [x]_{\alpha_n}^{\text{e}} \\ & = & \text{e} - \alpha_n \ln \alpha_n - (\text{e} - \alpha_n) \\ & = & \alpha_n (1 - \ln \alpha) \\ & = & \alpha_n \left(1 - 1 + \dfrac{\alpha_n}{n}\right) \\ & = & \dfrac{\alpha_n^2}{n} \end{array} .$$

$$\boxed{\mathcal{A}\left(\mathcal{D}_n\right) = \frac{\alpha_n^2}{n}}$$

b. *Etablir que :*

$$(\text{e} - \alpha_n) \ln \alpha_n \leqslant \frac{\alpha_n^2}{n} \leqslant (\text{e} - \alpha_n).$$



D'après le dessin l'intégrale est comprise entre l'aire du rectangle hachuré de gauche à droite et l'aire du rectangle hachuré de droite à gauche : d'où l'encadrement :

$$\boxed{\ln \alpha_n \left(\text{e} - \alpha_n\right) \leqslant \frac{\alpha_n^2}{n} \leqslant 1 \times \left(\text{e} - \alpha_n\right)}$$

c. *En déduire un encadrement de $n\left(\text{e} - \alpha_n\right)$.*

► On a :

$\ln \alpha_n \left(\text{e} - \alpha_n\right) \leqslant \dfrac{\alpha_n^2}{n}$

$n > 1$ donc $\alpha_n > 1$ et $\ln \alpha_n$ est strictement positif.

Ainsi

$n\left(\text{e} - \alpha_n\right) \leqslant \dfrac{\alpha_n^2}{\ln \alpha_n}$ (1)

► Par ailleurs, $\dfrac{\alpha_n^2}{n} \leqslant \left(\text{e} - \alpha_n\right)$

$\alpha_n^2 \leqslant n\left(\text{e} - \alpha_n\right)$.

► On obtient donc l'encadrement final :

$$\boxed{\alpha_n^2 \leqslant n\left(\text{e} - \alpha_n\right) \leqslant \frac{\alpha_n^2}{\ln \alpha_n}}$$

d. *La suite de terme général $n\left(\text{e} - \alpha_n\right)$ est-elle convergente ?*

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \alpha_n^2 = \text{e}^2$

et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n^2}{\ln \alpha_n} = \text{e}^2$

On a donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\left(\text{e} - \alpha_n\right) = \text{e}^2.}$$