Exercice 1 ■ • Complexes

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, unité graphique : 1 cm. Soit A le point d'affixe $z_A = -i$ et B le point d'affixe $z_B = -2i$. On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z, M distinct de A, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \dfrac{iz-2}{z+i}$.

1. *Démontrer que, si z est un imaginaire pur, $z \neq -i$, alors z' est imaginaire pur.*

z est imaginaire pur et $z \neq i$, alors $z = y\mathrm{i}$ où $y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et :

$$\begin{aligned} z' &= \frac{\mathrm{i}(\mathrm{i}y)-2}{\mathrm{i}y+\mathrm{i}} \\ &= \frac{-y-2}{\mathrm{i}(y+1)} \\ &= \frac{y+2}{y+1}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Or $\dfrac{y+2}{y+1}$ est réel,

$\boxed{\text{donc } z' \text{ est un imaginaire pur.}}$

Autre méthode

Rappel : z est un imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

z et $-\mathrm{i}$ étant deux imaginaires purs, on a :

$$\begin{aligned} \overline{z'} &= \overline{\left(\frac{\mathrm{i}z-2}{z+\mathrm{i}}\right)} \\ &= \frac{\overline{(\mathrm{i}z-2)}}{\overline{(z+\mathrm{i})}} \\ &= \frac{-\mathrm{i}(-z)-2}{-z-\mathrm{i}} \\ &= -z' \end{aligned}$$

donc z' est un imaginaire pur.

2. *Déterminer les points invariants par l'application f.* (On appelle point invariant de f les points M tels que $f(M) = M$).

On résout :

$$\begin{aligned} z = z' &\iff z = \frac{\mathrm{i}z-2}{z+\mathrm{i}} \\ &\iff z^2 + \mathrm{i}z = \mathrm{i}z - 2 \text{ et } z \neq -\mathrm{i} \\ &\iff z^2 = -2 \text{ et } z \neq -\mathrm{i} \\ &\iff z = \sqrt{2}\mathrm{i} \text{ ou } z = -\sqrt{2}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc les points invariants de } f \text{ sont les points d'affixes } \sqrt{2}\mathrm{i} \text{ et } -\sqrt{2}\mathrm{i}.}$

3. *Calculer $|z'-i| \times |z+i|$.*

$$\begin{aligned} |z'-\mathrm{i}| \times |z+\mathrm{i}| &= \left|\frac{\mathrm{i}z-2}{z+\mathrm{i}} - \mathrm{i}\right| \times |z+\mathrm{i}| \\ &= \left|\frac{\mathrm{i}z-2-\mathrm{i}z+1}{z+\mathrm{i}}\right| \times |z+\mathrm{i}| \\ &= \frac{|-1|}{|z+\mathrm{i}|} \times |z+\mathrm{i}|. \end{aligned}$$

$\boxed{|z'-\mathrm{i}| \times |z+\mathrm{i}| = 1}$

Montrer que, quand le point M décrit le cercle de centre A et de rayon 2, le point M' reste sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

M décrit le cercle de centre A, de rayon 2 signifie : $AM = 2 \iff |z+\mathrm{i}| = 2$.

On a alors $2|z'-\mathrm{i}| = 1 \iff |z'-\mathrm{i}| = \dfrac{1}{2}$

$\boxed{M' \text{ est alors situé sur le cercle de centre le point d'affixe i et de rayon } \frac{1}{2}.}$

4. a. *Développer $(z+i)^2$ puis factoriser $z^2 + 2iz - 2$.*

On a :

- $(z+\mathrm{i})^2 = z^2 + 2\mathrm{i}z + \mathrm{i}^2 = z^2 + 2\mathrm{i}z - 1.$
- $z^2 + 2\mathrm{i}z - 2 = z^2 + 2\mathrm{i}z - 1 - 1 = (z+\mathrm{i})^2 - 1 = (z+\mathrm{i}-1)(z+\mathrm{i}+1).$

b. *Déterminer et représenter l'ensemble des points M, tels que M' soit le symétrique de M par rapport à O.*

M' est le symétrique de M par rapport à O si et seulement si $z' = -z$. On résout alors :

$$\begin{aligned} -z = \frac{\mathrm{i}z-2}{z+\mathrm{i}} &\iff -z^2 - \mathrm{i}z = \mathrm{i}z - 2 \text{ et } z \neq -\mathrm{i} \\ &\iff z^2 + 2\mathrm{i}z - 2 = 0 \text{ et } z \neq -\mathrm{i} \\ &\iff (z+\mathrm{i}-1)(z+\mathrm{i}+1) = 0 \text{ et } z \neq -\mathrm{i} \\ &\iff z = 1-\mathrm{i} \text{ et } z = -1-\mathrm{i}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } M' \text{ est le symétrique de } M \text{ lorsque } M \text{ est d'affixe } 1-\mathrm{i} \text{ ou } -1-\mathrm{i}.}$

5. *Déterminer et représenter l'ensemble E des points M, tels que le module de z' soit égal à 1.* (On pourra remarquer que $z' = \dfrac{\mathrm{i}(z-z_B)}{z-z_A}$).

$$|z'| = \left|\frac{\mathrm{i}z-2}{z+\mathrm{i}}\right| = \left|\frac{\mathrm{i}(z+2\mathrm{i})}{z+\mathrm{i}}\right| = \frac{|\mathrm{i}|\,|z+2\mathrm{i}|}{|z+\mathrm{i}|} = \frac{|z+2\mathrm{i}|}{|z+\mathrm{i}|}.$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } |z'| = 1 &\iff \frac{|z+2\mathrm{i}|}{|z+\mathrm{i}|} = 1 \\ &\iff |z+2\mathrm{i}| = |z+\mathrm{i}| \text{ et } z \neq -\mathrm{i} \\ &\iff \mathrm{BM} = \mathrm{AM} \text{ et } \mathrm{M} \neq \mathrm{A} \\ &\iff \mathrm{M} \text{ est sur la médiatrice de } [\mathrm{AB}]. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{E est la médiatrice de [AB].}}$

Exercice 2

- Equations différentielles
- Fonction exponentielle

Partie A

1. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' - y = 0$.*
On a : $y' - y = 0 \iff y' = y$.

Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^x$ où C est un réel.

2. *Montrer que $h : x \mapsto (5-x)\,e^x - 2$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = 2 - e^x$.*
h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la forme $uv - 2$ avec :

$$\begin{array}{llll} u(x) = 5 - x & \text{donc} & u'(x) = -1 \\ v(x) = e^x & \text{donc} & v'(x) = e^x \end{array}$$

$$\text{Et : } \forall x \in \mathbb{R} : h'(x) = -1e^x + (5-x)e^x = (4-x)\,e^x.$$

Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} h'(x) - h(x) &= (4-x)\,e^x - [(5-x)\,e^x - 2] \\ &= (4 - x - 5 + x)\,e^x + 2 \\ &= 2 - e^x. \end{aligned}$$

h est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = 2 - e^x$.

3. *Montrer que g est solution sur $\mathbb{R}$ de $y' - y = 2 - e^x$ si et seulement si, $(g-h)$ est solution sur $\mathbb{R}$ de $y' - y = 0$.*
On a pour tout x réel :

$$\begin{array}{rl} (g-h) \text{ est solution de} & y' - y = 0 \\ \iff & (g-h)' - (g-h) = 0 \\ \iff & g' - h' - g + h = 0 \\ \iff & g' - g = h' - h \\ \iff & g' - g = 2 - e^x \\ \iff & g \text{ est solution de } y' - y = 2 - e^x. \end{array}$$

4. *En déduire l'ensemble des solutions de $y' - y = 2 - e^x$ puis la solution particulière dont la courbe admet une tangente de coefficient directeur égal à 1 en son point d'abscisse 0.*
Une solution de $y' - y = 2 - e^x$ est donc de la forme $g(x) = Ce^x + h$, où g est une solution de $y' - y = 0$, on obtient :

Les solutions de $y' - y = 2 - e^x$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto (C + 5 - x)\,e^x - 2$ où C est un réel.

Soit f la solution particulière cherchée. Au point d'abscisse 0, le coefficient directeur de la tangente est égal à 1, donc : $f'(0) = 1$.
f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^x + (C + 5 - x)\,e^x \\ &= (C + 4 - x)\,e^x. \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } f'(0) = 1 \iff (C+4) \times 1 = 1 \iff C = -3.$$

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2-x)\,e^x - 2$.

Remarque :

on trouve comme solution particulière la fonction de la partie B, ce qui est classique et de bonne augure!

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2e^x - 2 - xe^x.$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité 2 cm.

1. *Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les éventuelles asymptotes à $\mathscr{C}$ mises en évidence.* f est définie sur $\mathbb{R}$, donc deux limites à calculer.

▸ On a : $f(x) = (2-x)\,e^x - 2$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty} 2 - x & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x & = & +\infty \end{array}\right. \quad \text{donc} \lim_{x\to+\infty} (2-x)\,e^x = -\infty.$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$

▸ On a : $f(x) = 2e^x - 2 - xe^x$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x & = & 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -2 & = & -2 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{donc} \lim_{x\to-\infty} f(x) = -2.$$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2.$

2. *Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations complet.*
f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^x - (e^x + xe^x) \\ &= 2e^x - e^x - xe^x \\ &= (1-x)\,e^x. \end{aligned}$$

e^x est strictement positif pour tout x réel, donc, le signe de $f'(x)$ est donné par le signe de $(1-x)$. On en déduit le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	↗	$e - 2$	↘	$-\infty$

avec $f(1) = 2e^1 - 1 - 1 \times e^1 = e - 2$.

3. *Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions réelles. Vérifier que 0 est l'une d'elles puis donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de l'autre solution que l'on notera α.*

▸ *version bac :* d'après le tableau de variation, l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions réelles.

▸ *version maths :* Sur l'intervalle $]-\infty\,; 1]$, f est continue et strictement croissante. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$ et $f(1) = e - 2$ et 0 appartient à $]-2\,; e-2]$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $]-\infty\,; 1]$.
Sur l'intervalle $[1\,; +\infty[$, f est continue et strictement décroissante. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $f(1) = e - 2$ et 0 appartient à $]-\infty\,; e-2]$, donc, d'après

le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $]1\,;+\infty]$.

$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet deux solutions réelles.}}$

On a : $f(0) = 2\mathrm{e}^0 - 2 - 0\mathrm{e}^0 = 2 - 2 = 0$.
Donc 0 est une solution de l'équation $f(x) = 0$, et 0 appartient à $]-\infty\,;0]$.
A l'aide de la calculatrice, on obtient : $1,59 < \alpha < 1,6$