Fiche 2: équations différentielles

Exercice 1 ***(Sportifs de haut niveau 96)*** L'objectif de la partie A est de résoudre une équation différentielle (1) avec second membre. Dans la partie B, on étudiera une fonction, solution particulière de l'équation (1) , à l'aide d'une fonction auxiliaire. Dans la partie C, on déterminera l'aire d'une région du plan donnée. Les parties A, B et C peuvent être traités indépendamment l'une de l'autre.

PARTIE A

Résolution d'une équation différentielle.

On se propose de déterminer les fonctions définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$ *qui sont solutions de l'équation différentielle suivante :*

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2}e^{-x} \qquad (1)$$

1. *Montrer que la fonction* p *définie sur* $]0;+\infty[$ *par* $p(x) = e^{-x}\ln x$ *est une solution particulière de l'équation* (1).
2. *Démontrer qu'une fonction* f*, définie sur* $]0;+\infty[$ *est solution de l'équation différentielle* (1) *si et seulement si la fonction* $h = f - p$ *est une solution de l'équation différentielle :*

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \qquad (2)$$

3. *Déterminer les solutions de l'équation différentielle :*

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \qquad (2)$$

4. *En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle* (1).

PARTIE B

Etude de fonctions

On se propose dans cette partie d'étudier une solution particulière de l'équation différentielle (1). *Soit la fonction* f *définie sur* $]0;+\infty[$ *par :*

$$f(x) = e^{-x}(3 + \ln x)$$

I) Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g *définie sur* $]0;+\infty[$ *par :*

$$g(x) = -3 - \ln x + \frac{1}{x}$$

1. *Calculer les limites de* g *aux bornes de son ensemble de définition.*
2. *Déterminer la fonction dérivée* g' *de* g *et dresser le tableau de variation de* g.
3. *Démontrer que l'équation* $g(x) = 0$ *admet une seule solution* α *dans* $]0;+\infty[$ *et que cette solution* α *appartient à* $[0,45;0,46]$.

4. *Déduire de ce qui précède l'étude du signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.*

II) Etude de la fonction f.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 4 centimètres.

1. *Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de dé finition. Pour calculer la limite de f quand x tend vers $+\infty$, on pourra établir que :*

$$f(x) = 3e^{-x} + \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{e^x} \text{ pour tout } x > 0$$

Déduire de cette étude les asymptotes de la courbe $\mathcal{C}$.

2. *Déterminer la fonction dérivée f' de f et v érifier que, pour tout réel x strictement positif, on a :*

$$f'(x) = e^{-x} g(x)$$

Déduire des questions précédentes les variations de f. Pour le calcul de $f(\alpha)$, on prendra comme valeur approchée de α la valeur $0,45$.

3. *Déterminer le point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.*
4. *Tracer la courbe $\mathcal{C}$.*

III) Calcul d'aire

On considère dans le repère orthogonal $(O;\vec{u},\vec{v})$ ci-dessous (unité sur l'axe des abscisses : 4 cm, unité sur l'axe des ordonnées : 1 cm), la courbe de la fonction g définie par, pour tout $x > 0$,

$$g(x) = -3 - \ln x + \frac{1}{x}$$

α est la valeur déterminée en B.I.3 telle que $g(\alpha) = 0$.

1. *Déterminer en fonction de α :*

$$I = \int_{0,25}^{\alpha} \ln x \, dx$$

On pourra utiliser une intégration par parties.

2. (a) *Calculer, en fonction de α :*

$$J = \int_{0,25}^{\alpha} g(x)\, dx$$

(b) *Montrer que l'on a :*

$$J = \alpha + \frac{1}{\alpha} - \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\ln 2$$