# Nombres réels

**Exercice 1 :** Soient $n$ et $p$ deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$. Écrire les sommes suivantes à l'aide de $\sum$ :

1. $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3)$.
2. $a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13}$.
3. $a_{10} + a_{20} + a_{30} + a_{40}$.
4. $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$.
5. $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}$.
6. $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n-1} + a_{2n}$.
7. $a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n-1} + a_{2n}$.
8. $a_p + a_{p+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n$.
9. $a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n-2} + a_{2n}$.

♡ **Exercice 2 :**

1. Démontrer que $\sum_{k=1}^{3}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{3} a_k + \sum_{k=1}^{3} b_k$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ (additivité de la somme).
3. Comparer $\sum_{k=0}^{n} a_k$ et $\sum_{p=0}^{n} a_{n-p}$.

**Exercice 3 :** Compléter les formules suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k + \sum_{k=6}^{10} a_k = \sum_{k=\square}^{\square} a_k$
2. $\displaystyle\sum_{p=0}^{9} b_{p+4} = \sum_{q=\square}^{\square} b_q$.
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_{2k} + \sum_{k=0}^{4} a_{2k+1} = \sum_{k=\square}^{\square} a_k$.
4. $\displaystyle\sum_{p=0}^{9} b_{9-p} = \sum_{q=\square}^{\square} b_q$.
5. $\displaystyle\left(\sum_{p=1}^{n} b_p\right) + b_{n+1} = \sum_{p=1}^{\square} b_p$.
6. $\displaystyle\sum_{p=0}^{9}(p+1)b_p = \sum_{q=1}^{\square} q b_{\square}$.

**Exercice 4 :** Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 0$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1$.
4. $\displaystyle\sum_{k=i}^{j} 1$.
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a \ (a \in \mathbb{R})$.
6. $\displaystyle\sum_{k=i}^{j} a \ (a \in \mathbb{R})$.
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 5k$.
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k \ (x \in \mathbb{R})$.
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^{2k} \ (x \in \mathbb{R})$.
10. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a^k x^{-k} \ (a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^*)$.
11. $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} x_{i+1} - x_i$.
12. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{i+1} - x_i$.
13. ♡ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
14. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$.
15. ♡ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

**Exercice 5 :** On pose $C_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$ :

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

Calculer $C_1$, $C_2$, $C_3$ et démontrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, $C_n \geqslant 2^{n-1}$.

**Exercice 6 :** Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $S_n = \sum_{p=0}^{n}(2p)^2$ et $T_n = \sum_{p=0}^{n}(2p+1)^2$.

**Exercice 7 :** Calculer les sommes suivantes :

1. $n, p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(k+j)$.
2. $\displaystyle\sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} k \times j$ et $\displaystyle\sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} 1$.
3. $\displaystyle\sum_{1 \leqslant k < j \leqslant n} \frac{k}{j}$.
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=k}^{n}\frac{k}{j+1}\right)$.

**Exercice 8 :** Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ une famille de $2n$ réels quelconques.

$$\text{On pose } A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2,\ B = \sum_{k=1}^{n} b_k^2,\ \text{et } C = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

1. Calculer $P(x) = \sum_{k=1}^{n}(a_k x + b_k)^2$ en fonction de $A$, $B$, $C$ et $x$.
2. En déduire que $C^2 \leqslant AB$, (Inégalité de Cauchy-Schwartz).
3. Discuter le cas d'égalité.

**Exercice 9 :** Soit $n$ un entier naturel non nul.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel $k$ tel que $n \geqslant k \geqslant 1$, on a : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
2. En déduire que : $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}$.
3. Démontrer que : $\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} = 2^{n-1}$.
4. Démontrer que : $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

♡ **Exercice 10 : Démonstration de la formule du binôme de Newton**

1. En supposant que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$, démontrer que $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1}$.
2. En utilisant le changement d'indice $i = k+1$ dans la première somme précédente, démontrer que :

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i-1}a^i b^{n-i+1} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i+1} + b^{n+1}$$

3. En déduire que $(a+b)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}a^i b^{n-i+1}$.
4. Terminer la démonstration par récurrence.

**Exercice 11 :** Calculer $(1+\sqrt{3})^4 + (1-\sqrt{3}^4)$.

**Exercice 12 :** Utilisation du symbole $\prod$. On suppose que $n$ et $p$ sont deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$. Écrire les produits suivants à l'aide du symbole $\prod$.

1. $2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \dots \times (2n-2) \times 2n$.
2. $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1) \times (2n+1)$.
3. $\sin(x)\sin(2x)\sin(3x)\dots\sin(nx)$.
4. $(X-1)(X-2)(X-3)\dots(X-n)$.
5. $a_p^2 a_{p+1}^2 \dots a_{n-1}^2 a_n^2$.
6. $(X-a_1)^{\alpha_1}(X-a_2)^{\alpha_2}(X-a_3)^{\alpha_3}\dots(X-a_n)^{\alpha_n}$.

**Exercice 13 :**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\prod_{k=1}^{n} c$, $(c \in \mathbb{R})$.
2. Comparer : $\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)$ et $\prod_{k=1}^{n} a_k b_k$. En déduire $\prod_{k=1}^{n}(ca_k)$ en fonction de $\prod_{k=1}^{n} a_k$.
3. Comparer $\prod_{k=1}^{n} a_k$ et $\prod_{k=1}^{n} a_{n+1-k}$.

♡ **Exercice 14 :** Équations et inéquations.

1. On considère l'équation $(E)$ : $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$. Démontrer que $\alpha$ et $\beta$ sont solutions de $(E)$ si, et seulement si on a les relations suivantes :
   a. $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ ;
   b. $\alpha\beta = \frac{c}{a}$.
2. Soit $a$ un nombre réel quelconque. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $x^2 = a$ et $x^2 = x$.
3. Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation à paramètre : $m^2x^2 + 2mx - 3 = 0$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x = \sqrt{2-x}$.

**Exercice 15 :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ :

1. $\sqrt{2x^2+x+1} = x+1$.
2. $\sqrt{x^2-x-2} \geqslant |x-2|$.
3. $\sqrt{x^2-x-2} \geqslant x-2$.
4. $m \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2x+m} \geqslant x+1$.
5. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.
6. $(x^2)^x = x^{(x^2)}$.

♡ **Exercice 16 : Démonstration de l'inégalité triangulaire**
Le but de l'exercice est de démontrer la propriété :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ ||x| - |y|| \overset{(1)}{\leqslant} |x+y| \overset{(2)}{\leqslant} |x| + |y|$$

.

1. En élevant au carré $|x+y|$ et $|x|+|y|$, démontrer l'inégalité (2).
2. En remarquant que $|x| = |x+y-y|$, démontrer l'inégalité (1).