Đại học Sư phạm Huế
Khoa Toán

Tiểu luận

Bài toán Björling

Huỳnh Kỳ Anh
Cao học Toán khóa 13

Huế, tháng 11 năm 2005

Bài toán Björling

kyanh <kyanh@o2.pl>

Ngày 14 tháng 11 năm 2005

Tóm tắt nội dung

Bài toán Björling. Nguyên lý đối xứng Schwarz. Giải Bài toán Björling với Maple.

Mục lục

Danh sách các định lý, định nghĩa, ...

1 – Mặt tham số

Cho Ω là miền trong $\mathbb{R}^2$. Ánh xạ $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ khả vi lớp C^2 được gọi là mặt tham số. *Ánh xạ $\varphi : \Omega_1 \to \Omega$ vi phôi lớp C^2 giữa các miền của $\mathbb{R}^2$ được gọi là* phép đổi tham số.

2 – Tính chất của phép đổi tham số

Cho mặt $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ và $\overline{X} = X \cdot \varphi$ với $\varphi : \Omega_1 \to \Omega$ là phép đổi tham số. Khi đó,

$$\overline{X}_u \wedge \overline{X}_v = (\det \mathrm{D}\,\varphi) \cdot X_u \wedge X_v, \tag{1}$$
$$\overline{\mathrm{N}} = k \cdot \mathrm{N}, \tag{2}$$

$$\overline{\mathrm{E}} = a^2\,\mathrm{E} + \overline{a}^2\,\mathrm{G} + 2a\overline{a}\,\mathrm{F}, \tag{3}$$
$$\overline{\mathrm{G}} = c^2\,\mathrm{E} + \overline{c}^2\,\mathrm{G} + 2c\overline{c}\,\mathrm{F}, \tag{4}$$
$$\overline{\mathrm{F}} = ac\,\mathrm{E} + \overline{ac}\,\mathrm{G} + (a\overline{c} + \overline{a}c)\,\mathrm{F}, \tag{5}$$

$$k\,\overline{\mathrm{e}} = a^2\,\mathrm{e} + \overline{a}^2\,\mathrm{g} + 2a\overline{a}\,\mathrm{f}, \tag{6}$$
$$k\,\overline{\mathrm{g}} = c^2\,\mathrm{e} + \overline{c}^2\,\mathrm{g} + 2c\overline{c}\,\mathrm{g}, \tag{7}$$
$$k\,\overline{\mathrm{f}} = ac\,\mathrm{e} + \overline{ac}\,\mathrm{g} + (a\overline{c} + \overline{a}c)\,\mathrm{f}, \tag{8}$$

$$k\,\overline{\mathrm{W}} = T^{-1}\,\mathrm{W}\,T, \tag{9}$$

với $k = \operatorname{sgn}(\det \mathrm{D}\,\varphi)$ là hàm hằng, và $T = \mathrm{D}\,\varphi = \left[\begin{smallmatrix} a & c \\ \overline{a} & \overline{c} \end{smallmatrix}\right]$ là ma trận của $D\varphi$.

Ở đây, các ánh xạ ở bên phải dấu bằng trong các đẳng thức trên được hiểu là các ánh xạ hợp. Ví dụ, đẳng thức thứ hai được hiểu là $\overline{N} = k \cdot N \cdot \varphi$. Các đẳng thức từ thứ hai trở đi xảy ra tại các điểm chính quy của $\overline{X}$. Ký hiệu W chỉ ma trận của ánh xạ Weingarten trong cơ sở $\{X_u, X_v\}$.

Từ đẳng thức đầu tiên, ta suy ra nếu $\varphi(p)$ là điểm chính quy của X thì p là điểm chính quy của $\overline{X}$ (và ngược lại). Phép đổi tham số φ cho ta tương ứng $1-1$ giữa các điểm chính quy của X và của $\overline{X}$.

Ta chứng minh đẳng thức cuối cùng. Nếu S là ma trận của ánh xạ Weingarten của X trong cơ sở $\{X_u, X_v\}$, thì $(\mathrm{N}_u\ \ \mathrm{N}_v) = -(X_u\ X_v) \cdot \mathrm{W}$. Tương tự,

$$\begin{aligned}(\overline{\mathrm{N}}_u\ \overline{\mathrm{N}}_v) &= -(\overline{X}_u\ \overline{X}_v) \cdot \overline{\mathrm{W}} \\ k \cdot (\mathrm{N}_u\ \ \mathrm{N}_v) \cdot \mathrm{D}\,\varphi &= -(X_u\ X_v) \cdot \mathrm{D}\,\varphi \cdot \overline{\mathrm{W}} \\ -k \cdot (X_u\ X_v) \cdot \mathrm{W} \cdot \mathrm{D}\,\varphi &= -(X_u\ X_v) \cdot \mathrm{D}\,\varphi \cdot \overline{\mathrm{W}}\end{aligned} \tag{10}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

3 – Giá trị riêng của ánh xạ Weingarten

Nếu k_1, k_2 là các giá trị riêng của ánh xạ Weingarten của X, thì kk_1, kk_2 là các giá trị riêng của ánh xạ Weingarten của $\overline{X}$.

Thật vậy, nếu v là một véc tơ riêng ứng với giá trị riêng k_1 của W, thì $\mathrm{W}(v) = k_1 v$. Sử dụng (9), ta có $\overline{\mathrm{W}}(T^{-1}v) = k \cdot T^{-1}(k_1 v) = kk_1 \cdot T^{-1}v$. Vì $w = T^{-1}v \neq 0$, ta có w là véc tơ riêng của W ứng với giá trị riêng kk_1.

4 – Mặt cực tiểu
Mặt tham số X là cực tiểu *nếu $k_1 + k_2 = 0$, với k_1, k_2 là các giá trị riêng của ánh xạ Weingarten.*

Từ –**3**–, ta suy ra nếu X cực tiểu thì $\overline{X}$ cực tiểu. Nói cách khác, tính cực tiểu của mặt tham số không thay đổi qua các phép đổi tham số. Do đó, ta có thể nói *mặt cực tiểu* thay vì *mặt tham số cực tiểu*.

5 – Toàn ánh đẳng cự
Nếu $f : E \to F$ là toàn ánh đẳng cự[1] giữa các không gian tuyến tính thực thì $f = \Phi + c$ với $\Phi : E \to F$ là ánh xạ tuyến tính và hằng $c \in F$. Ta gọi Φ là thành phần tuyến tính của f. Thành phần tuyến tính của toàn ánh đẳng cự $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có ma trận dạng

$$\begin{bmatrix} a & c \\ \overline{a} & \overline{c} \end{bmatrix}, \tag{11}$$

với $a^2 + \overline{a}^2 = c^2 + \overline{c}^2 = 1$, $ac + \overline{ac} = 0$. (Định thức của ma trận đó bằng ± 1.)

6 – Mặt tham số isothermal
Mặt tham số X là `isothermal` *nếu $\mathrm{E} - \mathrm{G} = \mathrm{F} = 0$. Nếu X* `isothermal` *thì $\overline{X} = X \cdot \varphi$ cũng* `isothermal`*, với $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ là C^2 vi phôi mà ma trận $\mathrm{D}\,\varphi$ có dạng (11) với*

$$a^2 + \overline{a}^2 = c^2 + \overline{c}^2, \quad ac + \overline{ac} = 0. \tag{12}$$

Nói riêng, toàn ánh đẳng cự, phép vị tự và ánh xạ `exponent`

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad z \mapsto \exp(kz), \quad z = u + \mathrm{i}\,v \tag{13}$$

(k là hằng phức, $k \neq 0$) đều bảo toàn tính `isothermal` *của mặt tham số.*

Ánh xạ `exponent` được khảo sát trên từng miền đơn diệp của nó (để đảm bảo nó có hàm ngược). Với $k = a + \mathrm{i}\,b$, ta có

$$\exp(kz) = (e \cdot \cos;\ e \cdot \sin); \tag{14}$$

ở đây, ta viết tắt

$$e = \exp(au - bv), \quad \cos = \cos(av + bu), \quad \sin = \sin(av + bu). \tag{15}$$

[1] $\Phi : E \to F$ đẳng cự nếu $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| = \|x - y\|$ với mọi $x, y \in E$.

Dễ dàng tính được

$$\mathrm{D}\,\Phi = e \cdot \begin{bmatrix} a\cos - b\sin & -b\cos - a\sin \\ a\sin + b\cos & -b\sin + a\cos \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ \overline{a} & \overline{c} \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Từ đó suy ra

$$a^2 + \overline{a}^2 = c^2 + \overline{c}^2 = (ea)^2 + (eb)^2; \quad ac + \overline{ac} = 0. \tag{17}$$

7 – Phép đổi tham số bảo toàn N

Cho các phép đổi tham số $\Omega_2 \xrightarrow{\Phi} \Omega_1 \xrightarrow{\varphi} \Omega$, *trong đó,* $X \cdot \varphi$ *là* `isothermal` *với* $\operatorname{sgn}(\det \mathrm{D}\,\varphi) = -1$ *và* $\Phi(x, y) = (x, -y)$. *Khi đó,* $\overline{X} = X \cdot \varphi \cdot \Phi$ *là* `isothermal` *và* $\overline{N} = N$.

8 – Sự tồn tại tham số hóa isothermal

Tại các điểm chính quy của X cực tiểu, tồn tại ***địa phương*** *phép đổi tham số* `isothermal`.

9 – Isothermal và tính điều hòa

Nếu X là `isothermal` *thì* $\boxed{\Delta X := X_{uu} + X_{vv} = (2\,\mathrm{E}\,H) \cdot \mathrm{N}}$. *Do đó, nếu thêm giả thiết X cực tiểu, thì X điều hòa (và ngược lại).*

10 – Hàm điều hòa

Nếu $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ *điều hòa trên* miền đơn liên Ω *thì tồn tại* $X^* : \Omega \to \mathbb{R}^3$ *liên hiệp điều hòa với X. (Khi đó, phức hóa $f = X + \mathrm{i}\,X^*$ chỉnh hình.) Nếu X^* liên hiệp điều hòa với X thì $X^* + c$, với $c \in \mathbb{R}^3$ là hằng véc tơ bất kỳ, cũng liên hiệp điều hòa với X. Điều kiện đơn liên là không thể bỏ qua.*

11 – Mặt cực tiểu và Đường đẳng hướng

Nếu X cực tiểu, `isothermal`, *xác định trên miền Ω đơn liên, thì X^* cũng cực tiểu,* `isothermal`. *Ta nói X^* là mặt tham số liên hợp với X. Ngoài ra, phức hóa $f = X + \mathrm{i}\,X^*$ chỉnh hình, đẳng hướng trong $\mathbb{C}^3$, tức là $\langle f', f' \rangle = 0$.*

Ngược lại, nếu $f : \Omega \to \mathbb{C}^3$ chỉnh hình, đẳng hướng, thì

$$X = \Re f, \qquad X^* = \Im f \tag{18}$$

là các mặt tham số cực tiểu, `isothermal`.

12 – Tính duy nhất của hàm chỉnh hình

Cho $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ chỉnh hình trên miền $\Omega \subset \mathbb{C}$. Nếu tập hợp $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ có điểm tụ thuộc Ω, thì $f = g$.

Với hàm $f(t) : I \to \mathbb{R}^3$ giải tích thực, ta có thể chuyển f một cách tự nhiên thành hàm biến phức, bằng việc thay biến thực t bởi biến phức z trong khai triển Taylor của hàm đó. Kết quả là ta thu được hàm $f(z) : \Omega \to \mathbb{C}^3$ chỉnh hình trên miền Ω chứa I. Nói cách khác, $f(z)$ là thác triển giải tích của $f(t)$. Từ định lý trên, ta suy ra thác triển như vậy là duy nhất.

13 – Bài toán Björling

Cho đường cong $\omega : I \to \mathbb{R}^3$ giải tích (thực), chính quy và trường véc tơ $n : I \to \mathbb{R}^3$ giải tích (thực) dọc ω, sao cho $\|n\| = 1$ và $\langle n, \dot\omega \rangle = 0$. Ký hiệu $\mathfrak{B}(\omega, n)$ là mặt X cực tiểu, `isothermal`*, xác định trên miền đơn liên Ω nào đó chứa I, Ω nằm trong miền chỉnh hình của $n(z)$ và $\omega(z)$, và*

$$X(u,0) = \omega(u), \qquad \mathrm{N}(u,0) = n(u), \qquad u \in I. \tag{19}$$

Ta gọi $\mathfrak{B}(\omega, n)$ là nghiệm của Bài toán Björling *ứng với cặp (ω, n).*

Bài toán tìm mặt X cực tiểu (không nhất thiết `isothermal`) khi cho trước một đường cong ω trên mặt X cùng trường pháp véc tơ của mặt dọc theo đường cong ω, có thể đưa về bài toán ở trên, nhờ định lý về sự tồn tại địa phương phép đổi tham số `isothermal` và nhờ các biến đổi đẳng cự.

14 – Sự tồn tại duy nhất của nghiệm

Nghiệm $\mathfrak{B}(\omega, n)$ tồn tại duy nhất, xác định bởi

$$\boxed{\mathfrak{B}(\omega, n) = \Re\left\{\omega(z) - \mathrm{i}\int_{z_0}^{z} n(z) \wedge \dot\omega(z)\,\mathrm{d}z\right\},} \tag{20}$$

với $z_0 = u_0 \in I$ là điểm cố định.

15 – Tính duy nhất

Giả sử $X = \mathfrak{B}(\omega, n)$ là nghiệm ứng với cặp (ω, n). Khi đó, vì Ω đơn liên, X cực tiểu, `isothermal`, nên theo –**11**–, tồn tại mặt cực tiểu $X^* : \Omega \to \mathbb{R}^3$ liên hợp với X, sao cho $X^*(u_0, 0) = 0$ với $u_0 \in I$.

Vì X `isothermal`, ta có $\|X_u \wedge X_v\| = \|X_u\| \cdot \|X_v\| = \mathrm{E}$. Vậy $X_u \wedge X_v = \mathrm{E}\,\mathrm{N}$ và

$$X_v = \mathrm{N} \wedge X_u. \tag{21}$$

Ta có $f = X + \mathrm{i}\,X^*$ chỉnh hình trên Ω, đẳng hướng, $X = \Re f$ và

$$f' = X_u + \mathrm{i}\,X_u^* = X_u - \mathrm{i}\,X_v = X_u - \mathrm{i}\,\mathrm{N} \wedge X_u. \tag{22}$$

Nói riêng, với $z = u \in I$, ta có

$$\begin{aligned} f'(u) &= X_u(u,0) - \mathrm{i}\,\mathrm{N}(u,0) \wedge X_u(u,0) \\ &= \dot\omega(u) - \mathrm{i}\,n(u) \wedge \dot\omega(u). \end{aligned} \tag{23}$$

Lấy tích phân hai vế đẳng thức trên, với để ý $f(u_0) = X(u_0, 0) = \omega(u_0)$, ta có

$$f(u) = \omega(u) - \mathrm{i}\int_{u_0}^{u} n(t) \wedge \dot\omega(t)\,\mathrm{d}t. \tag{24}$$

Từ định lý –**12**– về tính duy nhất của hàm chỉnh hình, ta suy ra

$$f(z) = \omega(z) - \mathrm{i}\int_{u_0}^{z} n(z) \wedge \dot\omega(z)\,\mathrm{d}z. \tag{25}$$

Từ đó suy ra $X = \Re f$ được xác định duy nhất.

16 – Sự tồn tại

Giả sử $X = \mathfrak{B}(\omega, n)$ được xác định như ở (19). Ta chứng minh rằng X là nghiệm của bài toán Björling ứng với cặp (ω, n).

Ký hiệu $f(z)$ như ở (25). Khi đó, f chỉnh hình và

$$f'(z) = \dot\omega(z) - n(z) \wedge \dot\omega(z), \quad z \in \Omega. \tag{26}$$

Với $z = u \in I$, ta có $\omega(u)$ và $n(u) \wedge \dot\omega(u)$ là các véc tơ thực. Do đó,

$$\Re f'(u) = \dot\omega(u), \qquad \Im f'(u) = -n(u) \wedge \dot\omega(u), \qquad u \in I. \tag{27}$$

Để ý rằng, do $\big\langle n(u), \dot\omega(u)\big\rangle = 0$, ta có

$$\big\langle \dot\omega(u), n(u) \wedge \dot\omega(u)\big\rangle = 0, \qquad \big\|n(u) \wedge \dot\omega(u)\big\| = \big\|\dot\omega(u)\big\|, \qquad u \in I. \tag{28}$$

Vậy với mọi $u \in I$,

$$\langle f'(u), f'(u)\rangle = \big\|\dot\omega(u)\big\|^2 - \big\|n(u) \wedge \dot\omega(u)\big\|^2 - 2\,\mathrm{i}\big\langle \dot\omega(u), n(u) \wedge \dot\omega(u)\big\rangle = 0. \tag{29}$$

Từ định lý –**12**– về tính duy nhất của hàm chỉnh hình, ta suy ra

$$\big\langle f'(z), f'(z)\big\rangle = 0, \qquad z \in \Omega, \tag{30}$$

hay f là đường đẳng hướng trong $\mathbb{C}^3$. Theo –**11**–, $X = \Re f$ cực tiểu, `isothermal`. Với $u \in$ thì $\omega(u)$, $n(u) \wedge \dot\omega(u)$ là các véc tơ thực. Do đó, từ (25) ta có

$$X(u, 0) = \Re f(u) = \omega(u) \tag{31}$$

và

$$f'(u) = X_u(u, 0) - \mathrm{i}\, X_v(u, 0) = \dot\omega(u) - \mathrm{i}\, n(u) \wedge \dot\omega(u), \qquad u \in I. \tag{32}$$

Mặt khác, do X `isothermal`,

$$X_v(u, 0) = \mathrm{N}(u, 0) \wedge X_u(u, 0), \qquad u \in I. \tag{33}$$

So sánh phần thực và phần ảo hai vế ở (32), ta có $(u \in I)$

$$\mathrm{N}(u, 0) \wedge \dot\omega(u) = n(u) \wedge \dot\omega(u), \tag{34}$$

$$\big\{\mathrm{N}(u, 0) - n(u)\big\} \wedge \dot\omega(u) = 0. \tag{35}$$

Vì $\gamma(u) = \mathrm{N}(u, 0) - n(u)$ vuông góc với $\dot\omega(u) = X_u(u, 0)$ và $\dot\omega(u) \neq 0$ do tính chính quy của ω, ta suy ra $\gamma = 0$, hay

$$\mathrm{N}(u, 0) = n(u), \qquad u \in I. \tag{36}$$

Vậy X là nghiệm $\mathfrak{B}(\omega, n)$ của bài toán Björling ứng với cặp (ω, n).

17 – Hàm xoay γ

*Cho đường cong phẳng $\omega = (a, 0, c)$, $\omega : I \to \mathbb{R}^3$, giải tích, chính quy. Với $\gamma : I \to \mathbb{R}$ là hàm giải tích bất kỳ, trường véc tơ n_γ như sau thỏa mãn các điều kiện trong –**13**–:*

$$\boxed{n_\gamma = \frac{1}{\sqrt{\dot a^2 + \dot c^2 + \gamma^2}} (-\dot c;\ \gamma;\ \dot a).} \tag{37}$$

Đặc biệt, $\pm n_0$ là trường véc tơ pháp tuyến chính của ω. Nếu α là góc giữa n_γ và n_0, thì

$$|\operatorname{tg} \alpha| = |\gamma|. \tag{38}$$

Ta gọi γ là hàm xoay *của ω.*

Rõ ràng, việc giải Bài toán Björling cho các đường cong phẳng *gần như vét hết* các mặt cực tiểu. Ngoài ra, các trường véc tơ n_γ cho ta gần như tất cả các trường véc tơ (giải tích!) dọc cung ω và vuông góc với $\dot\omega$. Vì thế, việc đưa ra biểu thức cụ thể của nghiệm $\mathfrak{B}(\omega, n)$ trong trường hợp ω tổng quát sẽ không thực sự kinh tế, ít nhất là về mặt tính toán.

Hàm γ có thể không xác định tại một số điểm của I. Tuy nhiên, nếu biểu thức rút gọn của n_γ xác định trên toàn I, thì rõ ràng tính không xác định của γ không ảnh hưởng đến kết quả của ta.

Dễ dàng kiểm tra được $\langle n_\gamma, \dot\omega\rangle = 0$ và $\|n_\gamma\| = 1$. Để ý rằng,

$$-\dot c + \mathrm{i}\,\dot a = \mathrm{i}(\dot a + \mathrm{i}\,\dot c), \tag{39}$$

tức véc tơ $(-\dot c; 0; \dot a)$ là ảnh của véc tơ $(\dot a; 0; \dot c)$ qua phép quay (trong mặt phẳng $0xz$) góc $+\pi/2$. Vậy n_γ là trường véc tơ pháp tuyến chính của ω. Bây giờ, ta có

$$\big|\langle n_\gamma, n_0\rangle\big| = |\cos \alpha| = \sqrt{\frac{\dot a^2 + \dot c^2}{\dot a^2 + \dot c^2 + \gamma^2}}. \tag{40}$$

Do đó, $|\operatorname{tg} \alpha| = |\gamma|$.

18 – Nghiệm $\mathfrak{B}_\gamma(\omega)$ ứng với đường cong phẳng

Nghiệm $\mathfrak{B}_\gamma(\omega) = \mathfrak{B}(\omega, n_\gamma)$, với $\omega = (a, 0, c)$, được cho bởi

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}^1_\gamma(\omega) &= \Re\left\{ a(z) - \mathrm{i} \int_{w_0}^{z} \frac{\gamma \dot c}{\sqrt{\dot a^2 + \dot c^2 + \gamma^2}}\, \mathrm{d}z \right\},\\
\mathfrak{B}^2_\gamma(\omega) &= \Im\left\{ \int_{w_0}^{z} \frac{\dot a^2 + \dot c^2}{\sqrt{\dot a^2 + \dot c^2 + \gamma^2}}\, \mathrm{d}z \right\},\\
\mathfrak{B}^3_\gamma(\omega) &= \Re\left\{ c(z) + \mathrm{i} \int_{w_0}^{z} \frac{\gamma \dot a}{\sqrt{\dot a^2 + \dot c^2 + \gamma^2}}\, \mathrm{d}z \right\}.
\end{aligned} \tag{41}$$

Đặc biệt, ω là đường trắc địa trên $\mathfrak{B}_0(\omega)$.

Điều này được suy ra từ

$$n_\gamma \wedge \dot{\omega} = \frac{1}{\sqrt{\dot{a}^2 + \dot{c}^2 + \gamma^2}} (\gamma\dot{c};\ \dot{a}^2 + \dot{c}^2;\ -\gamma\dot{a}). \tag{42}$$

Theo –**17**–, n_0 là trường véc tơ pháp tuyến chính của ω. Suy ra, véc tơ gia tốc dọc theo đường cong ω song song với véc tơ pháp tuyến chính của mặt $\mathfrak{B}_0(\omega)$. Nói cách khác, ω là đường trắc địa trên $\mathfrak{B}_0(\omega)$.

19 – Nghiệm $\boldsymbol{\mathfrak{B}(\omega, -n)}$

Nghiệm $\mathfrak{B}(\omega, -n)$ được xác định bởi

$$\boxed{\mathfrak{B}(\omega, -n)(u, v) = \mathfrak{B}(\omega, n)(u, -v)} = \Re\left\{\omega(z) + i\int_{z_0}^{z} n(z) \wedge \dot{\omega}(z)\,\mathrm{d}z\right\}. \tag{43}$$

Ký hiệu $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x, -y)$. Ta có Φ là toàn ánh đẳng cự. Nếu Ω là miền đơn liên chứa đoạn I, thì $\Omega' = \Phi(\Omega)$ cũng là miền đơn liên, và giao $\Omega \cap \Omega'$ là tập hợp mở[2], chứa I. Do đó, ta có thể nói đến sự xác định $\mathfrak{B}(\omega, n)(u, -v)$ trong một miền Ω đơn liên đủ nhỏ, chứa I, thỏa mãn $\Omega = \Phi(\Omega)$.

Bây giờ, ký hiệu $\overline{X} = X \cdot \Phi$ với $X = \mathfrak{B}(\omega, n)$. Theo –**4**– và –**6**–, $\overline{X}$ là mặt cực tiểu `isothermal`. Ta có $\overline{\mathrm{N}} = -\mathrm{N}\cdot\Phi$. Nói riêng, $\overline{\mathrm{N}}(u, 0) = -\mathrm{N}(u, 0) = -n(u)$ với $u \in I$. Để ý rằng, $\overline{X}(u, 0) = X(u, 0)$ với mọi $u \in I$. Như vậy, $\overline{X}$ chính là nghiệm $\mathfrak{B}(\omega, -n)$. Nghĩa là

$$\mathfrak{B}(\omega, -n)(u, v) = \overline{X}(u, v) = X(u, -v) = \mathfrak{B}(\omega, n)(u, -v). \tag{44}$$

20 – Tính đối xứng (1)

Cho mặt tham số $X : \Omega \to \mathbb{R}$ cực tiểu, `isothermal`*, xác định trên miền đơn liên Ω chứa khoảng I nằm trên trục thực. Nếu với mọi $u \in I$, điểm $X(u, 0)$ nằm trên trục $0x$, thì*

$$\boxed{X^1(u, -v) = X^1(u, v), \quad X^2(u, -v) = -X^2(u, v), \quad X^3(u, -v) = -X^3(u, v).} \tag{45}$$

Với $u \in I$, ký hiệu $\omega(u) = X(u, 0)$ và $n(u) = \mathrm{N}(u, 0)$. Vì $X(u, 0)$ nằm trên trục $0x$, nên $\omega = (\omega^1, 0, 0)$. Do n vuông góc với $\dot{\omega}$, ta suy ra $n = (0, b, c)$. Khi đó,

$$n \wedge \dot{\omega} = (0;\ c\dot{\omega}^1;\ -b\dot{\omega}^1). \tag{46}$$

Do tính duy nhất nghiệm của bài toán Björling, ta có $X = \mathfrak{B}(\omega, n)$, cụ thể:

$$X^1 = \Re(\omega^1), \quad X^2 = \Re\left\{-\,\mathrm{i}\int_{u_0}^{z} c\dot{\omega}^1\,\mathrm{d}z\right\}, \quad X^3 = \Re\left\{+\,\mathrm{i}\int_{u_0}^{z} b\dot{\omega}^1\,\mathrm{d}z\right\}. \tag{47}$$

Mặt khác, nghiệm $\overline{X} = \mathfrak{B}(\omega, -n)$ được cho bởi

$$\overline{X}^1 = \Re(\omega^1), \quad \overline{X}^2 = \Re\left\{+\,\mathrm{i}\int_{u_0}^{z} c\dot{\omega}^1\,\mathrm{d}z\right\}, \quad \overline{X}^3 = \Re\left\{-\,\mathrm{i}\int_{u_0}^{z} b\dot{\omega}^1\,\mathrm{d}z\right\}. \tag{48}$$

Nghĩa là $(\overline{X}^1, \overline{X}^2, \overline{X}^3) = (X^1, -X^2, -X^3)$. Từ –**19**–, ta có điều phải chứng minh.

[2] Liệu $\Omega \cap \Omega'$ là miền đơn liên?

21 – Tính đối xứng (2)

Cho mặt tham số $X : \Omega \to \mathbb{R}$ cực tiểu, `isothermal`*, xác định trên miền đơn liên Ω chứa khoảng I nằm trên trục thực. Nếu đường cong $\Sigma = \big\{X(u,0) : u \in I\big\}$ nằm trong mặt phẳng $0xy$, và nếu mặt X trực giao với mặt phẳng đó, nghĩa là trường véc tơ pháp tuyến chính $\mathrm{N}(u,0)$ cũng nằm trong $0xy$, thì*

$$\boxed{X^1(u,-v) = X^1(u,v), \quad X^2(u,-v) = X^2(u,v), \quad X^3(u,-v) = -X^3(u,v).} \tag{49}$$

Với $u \in I$, ký hiệu $\omega(u) = X(u,0)$ và $n(u) = \mathrm{N}(u,0)$. Vì $X(u,0)$ và $n(u)$ đều nằm trên phẳng $0xy$, nên $\omega = (\omega^1, \omega^2, 0)$. và $n = (a,b,0)$. Khi đó,

$$n \wedge \dot\omega = (0; 0;\, a\dot\omega^2 - b\dot\omega^1). \tag{50}$$

Nghiệm $X = \mathfrak{B}(\omega, n)$ được cho bởi

$$X^1 = \Re(\omega^1), \quad X^2 = \Re(\omega^2), \quad X^3 = \Re\left\{-\,\mathrm{i}\int_{u_0}^{z} b(a\dot\omega^2 - b\dot\omega^1)\,\mathrm{d}z\right\}. \tag{51}$$

Nghiệm $\overline{X} = \mathfrak{B}(\omega, -n)$ được cho bởi

$$X^1 = \Re(\omega^1), \quad X^2 = \Re(\omega^2), \quad X^3 = \Re\left\{+\,\mathrm{i}\int_{u_0}^{z} b(a\dot\omega^2 - b\dot\omega^1)\,\mathrm{d}z\right\}. \tag{52}$$

Như vậy, $(\overline{X}^1, \overline{X}^2, \overline{X}^3) = (X^1, X^2, -X^3)$. Từ –**19**–, ta có điều phải chứng minh.

22 – Nguyên lý đối xứng Schwarz

✌ *Mọi đường thẳng nằm trên mặt cực tiểu đều là trục đối xứng của mặt đó.*

✌ *Nếu mặt cực tiểu X trực giao với mặt phẳng E, thì E là mặt phẳng đối xứng của X.*

Đây là nguyên lý có tính địa phương, được suy ra từ –**20**– và –**21**–.

23 – Vẽ trường véc tơ dọc cung

Hàm `VField` (Hình 1 ở trang liền sau) vẽ trường véc tơ V dọc cung F trên đoạn $[a; b]$:

```
VField := proc(F,V,a,b,num,goodV)
```

Trong đó, F, V là các hàm của biến t, nhận giá trị trong $\mathbb{R}^3$. Số `num` cho biết bao nhiêu véc tơ của trường sẽ được vẽ; nếu nhỏ hơn 0, giá trị được chọn lại là 20. Nếu trường V đã được chuẩn hóa, nên dùng `goodV=1`. Kết quả trả về của hàm, là đối tượng đồ họa của cung và trường véc tơ, có thể xem được nhờ hàm `display`. Ví dụ:

```
tmp := VField([0,0,t], [1,1,t], 0, 0);
display(tmp);
```

24 – Tính nghiệm $\mathfrak{B}_\gamma(\omega)$

Hàm `BjorE` (Hình 24 ở trang 15) tính nghiệm $\mathfrak{B}_\gamma(\omega)$, với đường cong phẳng $F = (a, 0, c)$ và hàm xoay γ. `Prototype` của hàm `BjorE` như sau:

```
########################################################################
# Copyright (C) 2005 kyanh <kyanh@o2.pl>
# License: LGPL
########################################################################
> VField := proc(F,V,a,b,num,goodV)
>  local x, k, L, norm, plotA, plotB;
>  if (num <=0) then num := 20; end if;
>  x := (b-a)/num; L := [0,0,0];
>  if (goodV<=0) then
>   norm := simplify(sqrt(V[1]*V[1] + V[2]*V[2] + V[3]*V[3]),symbolic);
>  else norm := 1; end if;
>  L[1] := V[1]/norm + F[1];
>  L[2] := V[2]/norm + F[2];
>  L[3] := V[3]/norm + F[3];
>  plotB := spacecurve(F,t=a..b,thickness=3,color=red);
>  plotA := seq(
>   plottools[arrow](
>    subs(t=a+k*x,F), subs(t=a+k*x,L),
>    0.02,.05,.05, color=COLOR(RGB,1,0,0)),
>   k=0..num);
>  return {plotA,plotB};
> end:
```

Hình 1: Vẽ trường véc tơ dọc cung

```
BjorE := proc(F,gamma,magic)
```

`F` và `gamma` là hàm của biến thực t. Hằng số phức `magic` được sử dụng để đơn giản kết quả thu được trong một số trường hợp; với `magic` khác không, kết quả sẽ được đổi tham số nhờ ánh xạ `exponent` nói ở –**6**–.

Kết quả trả về của hàm `BjorE` là nghiệm $\mathfrak{B}_\gamma(\omega)$, nghiệm liên hợp của nghiệm đó, đường cong đẳng hướng tương ứng,... Để vẽ mặt thu được (cùng trường véc tơ dọc cung `F`), sử dụng hàm `showB`:

```
showB := proc(R,A1,A2,B1,B2)
```

Ở đây, `R` là kết quả trả về của hàm `BjorE`, `A1..A2` là miền giới hạn cho biến u, `B1..B2` là miền giới hạn cho biến v.

Ví dụ:

```
tmp := BjorE([0,0,t], cos(t)/sin(t), 0);
showB(tmp,-Pi,Pi,-2,2); # vẽ kết quả (mặt HELICOID)
```

Ta có nhận xét rằng, kết quả trả về của hàm `BjorE` nhiều khi không đẹp lắm. Ta phải tính toán lại bằng tay mới được các biểu thức gọn. Trong kết quả đó thường có các hàm đặc biệt, ví dụ `arctan`, `csgn`, các hàm tích phân `Elliptic`, ... Xem thêm tài liệu hướng dẫn của `Maple` để biết định nghĩa của chúng.

Việc lựa chọn hằng số `magic` khi gọi hàm `BjorE` được tiến hành theo phương pháp `thử-sai`.

Việc tính toán nghiệm với `Maple` có thể cho kết quả trong tích tắc. Tuy nhiên, việc vẽ các mặt cực tiểu thu được nhờ `plot3d` lại tiêu tốn rất nhiều thời gian và tài nguyên của máy tính.

Có thể dùng `MuPAD` để tính nghiệm. Tuy nhiên, `MuPAD` là chương trình yếu về tích phân, đặc biệt là tích phân của hàm phức.

25 – Các bài toán tham khảo

Bảng 1 liệt kê một số bài toán Björling có thể giải nhanh chóng với `Maple`. Tất cả đều sử dụng giá trị `magic=0`. Một số được minh họa ở –**27**–.

ω	γ	*Chú thích*
$[0, 0, t]$	$\sin t$	
$[0, 0, t]$	$\sinh t$	
$[0, 0, t]$	$\cos t/\sin t$	Mặt Helicoid. Xem (54)
$[t, 0, \frac{1}{t}]$	0	
$[t, 0, t^2]$	0	Xem (57)
$[t, 0, \sin t]$	0	Xem (58)
$[t, 0, \cos t]$	$\cos t$	Xem (53)
$[t, 0, \cosh t]$	0	Mặt Catenoid
$[\sin t, 0, \cos t]$	0	Mặt Catenoid
$[\sin t, 0, \cos t]$	1	Mặt Catenoid
$[\sin t, 0, \cos t]$	$\sin t$	
$[t \sin t, 0, t \cos t]$	0	Xem (55)
$[t - \frac{1}{3}t^3, 0, -t^2]$	0	Xem (56)
$[1 - \cos t, 0, t - \sin t]$	0	Mặt Catalan
$[\cosh 2t, 0, -\sinh t + \frac{1}{3}\sinh 3t]$	0	Mặt Henneberg

Bảng 1: Các Bài toán Björling tham khảo

26 – Vấn đề còn lại

- ✗ Ở –**17**–, ta đã chỉ ra rằng ω là đường trắc địa trên mặt $\mathfrak{B}_0(\omega)$, với ω là đường cong phẳng. Câu hỏi đặt ra là, *liệu tồn tại mặt cực tiểu mà mọi đường trắc địa của nó đều không phẳng?*

- ✗ Theo –**5**–, mọi toàn ánh đẳng cự giữa các không gian tuyến tính định chuẩn thực đều sai lệch một hằng véc tơ so với một ánh xạ tuyến tính nào đó. *Thế các đẳng cự không nhất thiết toàn ánh thì sao?*

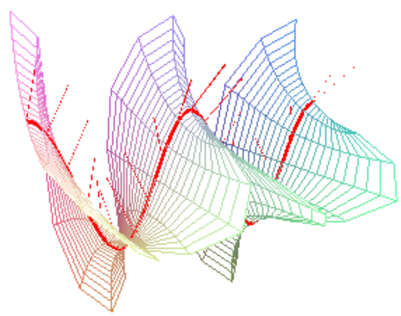
- ✗ Tinh chỉnh hàm `BjorE` ở Hình 24 ở trang 15 để các kết quả thu được thật sự đẹp, không cần phải tính toán lại bằng tay!

- ✗ Chứng tỏ mặt `Henneberg` không định hướng được.

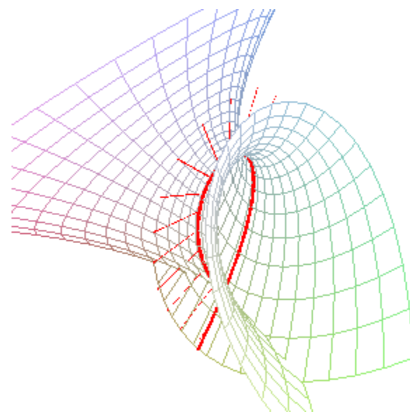
- ✗ Kiểm tra nguyên lý đối xứng cho `Helicoid`.

- ✗ Giao của hai miền đơn liên trong $\mathbb{R}^2$ có phải là miền đơn liên?

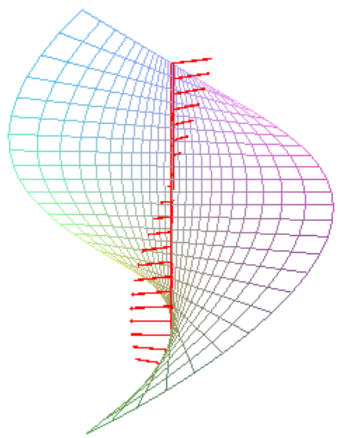
27 – Một số nghiệm biểu diễn trong Maple



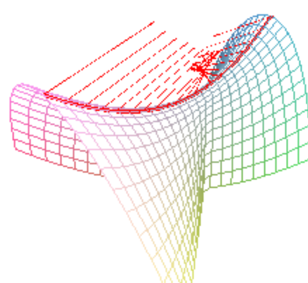
$$\omega = [t, 0, \cos t],\ \gamma = \cos t \qquad (53)$$



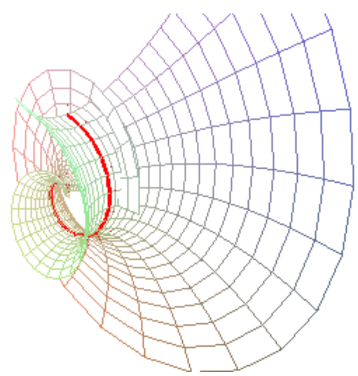
$$\omega = [t - \frac{1}{3}t^3, 0, -t^2],\ \gamma = 0 \qquad (56)$$



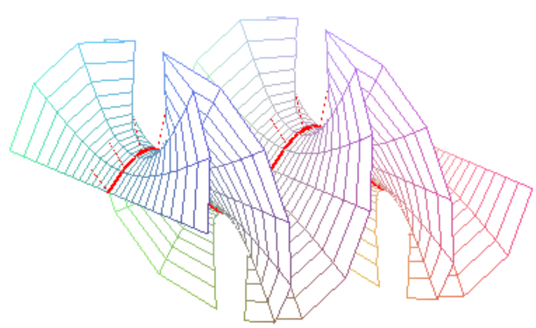
$$\omega = [0, 0, t],\ \gamma = \frac{\cos t}{\sin t} \qquad (54)$$



$$\omega = [t, 0, t^2],\ \gamma = 0 \qquad (57)$$



$$\omega = [t \sin t, 0, t \cos t],\ \gamma = 0 \qquad (55)$$



$$\omega = [t, 0, \sin t],\ \gamma = 0 \qquad (58)$$

```
###################################################################
# Copyright (C) 2005 kyanh <kyanh@o2.pl>
# License: LGPL
###################################################################
> with(linalg) : assume(u,real) : additionally(v,real) : additionally(t,real) :
> BjorE := proc(F,g,magic)
>    local fz, M1, adiff, cdiff, Ia, Ib, Ic, vfield, Ja, Jb, Jc;
>    adiff := diff(F[1],t); cdiff := diff(F[3],t);
>  Ib := adiff*adiff + cdiff*cdiff;
>  M1 := simplify(sqrt(Ib + g*g), symbolic);
>    vfield := [-cdiff/M1,g/M1,adiff/M1];
>  Ia := subs(t=z,F[1]) - I*int(subs(t=z,simplify(g*cdiff/M1)),z);
>  Ib := -I*int(subs(t=z,simplify(Ib/M1),z);
>  Ic := subs(t=z,F[3]) - I*int(subs(t=z,simplify(-g*adiff/M1)),z);
>  if (magic <> 0) then
>    Ia := subs(z=exp(magic*z),Ia);
>    Ib := subs(z=exp(magic*z),Ib);
>    Ic := subs(z=exp(magic*z),Ic);
>  end if;
>  Ia := simplify(Ia); Ib := simplify(Ib); Ic := simplify(Ic);
>    fz := [Ia, Ib, Ic];
>  Ia := evalc(subs(z=u+I*v,expand(Ia)));
>  Ib := evalc(subs(z=u+I*v,expand(Ib)));
>  Ic := evalc(subs(z=u+I*v,expand(Ic)));
>    Ja := Ia; Jb := Ib; Jc := Ic;
>  Ia := simplify(convert(simplify(Re(Ia),trig),trig),trig);
>  Ib := simplify(convert(simplify(Re(Ib),trig),trig),trig);
>  Ic := simplify(convert(simplify(Re(Ic),trig),trig),trig);
>    Ja := simplify(convert(simplify(Im(Ja),trig),trig),trig);
>    Jb := simplify(convert(simplify(Im(Jb),trig),trig),trig);
>    Jc := simplify(convert(simplify(Im(Jc),trig),trig),trig);
>  return [fz, [Ia,Ib,Ic], [Ja,Jb,Jc], [F,vfield]];
> end:
> showB := proc(rBjorE,rA1,rA2,rB1,rB2)
>  local gA, gB;
>  gA := plot3d(rBjorE[2],u=rA1..rA2, v=rB1..rB2);
>  gB := VField(rBjorE[4][1],rBjorE[4][2],rA1,rA2,20,1);
>  plots[display](gA,gB);
> end:
```

Hình 2: Tính nghiệm $\mathfrak{B}_\gamma(\omega)$