

FRACTIONS CONTINUES

Une autre manière d'écrire les nombres

Compétences mathématiques :

- Algorithme d'Euclide, PGCD, calcul fractionnaire, nombre d'Or.

Compétences informatiques :

- Boucles « TANT QUE », manipulation de listes.

Prérequis :

- Familiarité avec la programmation.

Partie 1: Un exemple « à la main »

Le problème

Écrire un nombre rationnel sous la forme d'une fraction faisant apparaître les quotients successifs de l'algorithme d'Euclide.

1. Algorithme d'Euclide

a. Observez l'algorithme suivant :

$$172 = 3 \times 51 + 19 \quad (1)$$

$$51 = 2 \times 19 + 13 \quad (2)$$

$$19 = 1 \times 13 + 6 \quad (3)$$

$$13 = 2 \times 6 + 1 \quad (4)$$

$$6 = 6 \times 1 + 0 \quad (5)$$

b. Complétez alors la suite d'égalité suivante :

$$\frac{172}{51} = 3 + \frac{19}{51} = 3 + \frac{1}{\frac{51}{19}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{13}{19}} = \dots$$

2. Pratique du développement

a. Quand tous les numérateurs sont égaux à 1, on dit qu'on a développé $\frac{172}{51}$ en fraction continue, et pour simplifier l'écriture on note :

$$\frac{172}{51} = [3; 2; \dots]$$

b. Développez de même $\frac{453}{54}$ en fraction continue.

c. Écrire $[2; 5; 4]$ sous la forme d'une fraction irréductible.

Partie 2: Exploration à l'aide de XCAS

1. Fin de l'algorithme d'Euclide

Quand est-ce que s'arrête l'algorithme d'Euclide ? Est-on sûr qu'il va effectivement s'arrêter ?

2. Nouveaux outils XCAS

Explorez les fonctions `reste(n,p)` et `quotient(n,p)` puis dites en quoi elles vont nous être utiles. On aura aussi besoin de savoir que `NULL` désigne une liste vide.

3. Écriture de la procédure

Voici le début et la fin de la procédure, à vous d'en découvrir le cœur...

```

frac_cont(a,b):={
local num,den,res,liste;
num:=a;
den:=b;
res:=reste(num,den);
liste:=NULL;
tantque...
.
.
.
ftantque
return([liste,quotient(num,den)]);
};;

```

4. Inverses et fractions continues

Comparez les développements en fractions continues de $\frac{172}{51}$ et $\frac{51}{172}$. Commentez.

Partie 3: Observation d'une procédure

À votre avis, que fait cette procédure :

```

frac2nombre(liste):={
dernier:=size(liste)-1;
temp:=liste[dernier]
pour k de dernier-1 jusque 0 pas -1 faire
  temp:=liste[k]+1/temp;
fpour
};;

```

Partie 4: Le nombre d'Or

On appelle *Nombre d'Or* et on note Φ le nombre $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Sur **XCAS**, cela donne :

```
Phi:=(sqrt(5)+1)/2
```

1. Calculez $\frac{1}{\Phi}$ puis $1 + \frac{1}{\Phi}$ sans racines au dénominateur.
2. Retrouvez ce résultat à l'aide de **XCAS**. On pourra utiliser la fonction `normal` qui renvoie entre autre ce genre de fractions avec un dénominateur entier.
3. Donnez une approximation de Φ à l'aide de **XCAS**. On utilisera la commande `evalf(x)` qui renvoie une valeur approchée de x .
4. Le code `1$50` permet d'écrire 50 1 séparés par une virgule.
Comparez `evalf(frac2nombre([1$50]))` avec le résultat de la question précédente. Commentez.