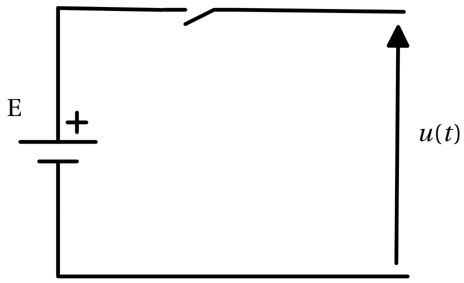
Exercices BTS 2 : rappels d'analyse - fonctions usuelles

Exercice 1 Échelon de Heaviside

1. Occupons-nous de fonctions utilisées couramment en électricité et aussi en infographie, en musique, etc.

On considère le cicuit très simple ci-contre. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$ et on mesure la tension $\mathscr{U}(t)$. Elle peut être définie par

$$t \mapsto \mathscr{U}(t) = \begin{cases} \mathrm{E} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$



Représentez graphiquement la fonction $\mathscr{U}$.

2. On note f la fonction $f : t \mapsto \mathscr{U}(t-2)$ et $g : t \mapsto \mathscr{U}(t+2)$.
En électricité, on appelle l'une *échelon retardé* et l'autre *échelon avancé* : pourriez-vous dire qui est qui ?

Exercice 2 Fonction porte

Représentez la fonction $\Pi : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{E} & \text{si } |x| \leqslant 1/2 \\ -\mathrm{E} & \text{si } |x| > 1/2 \end{cases}$

Donnez une interprétation physique de cette fonction si x représente la fréquence d'un signal émis par un émeteur radio.

Exercice 3 Signal carré

Pour s'amuser, on fait varier le sens du courant. Représentez la fonction φ qui est de période 1 et vérifie

$$t \mapsto \varphi(t) = \begin{cases} \mathrm{E} & \text{si } 0 < t < 1/2 \\ -\mathrm{E} & \text{si } 1/2 < t < 1 \end{cases}$$

Exercice 4 Signal triangulaire

1. Soit T la fonction **paire**, de période 1, et qui vérifie, pour tout $x \in [0 ; 1/2[$

$$\mathrm{T}(x) = \mathrm{E} - 2\mathrm{E}x$$

Représentez graphiquement cette fonction et déterminez l'expression de cette fonction pour $x \in]-1/2 ; 0]$

2. On considère la fonction Λ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\Lambda : t \mapsto t\mathscr{U}(t) - 2(t-1)\mathscr{U}(t-1) + (t-2)\mathscr{U}(t-2)$$

où $\mathscr{U}$ est la fonction de Heavyside étudée précédemment.
Représentez graphiquement cette fonction en distingant les intervalles $]-\infty ; 0[$, $[0 ; 1[$, $[1 ; 2[$ et $[2 ; +\infty[$.

3. Donnez un nom à la fonction suivante d, de période 1, telle que $d(x) = \mathrm{E}x$ pour tout $x \in [0 ; 1[$.

Exercice 5 Fonctions causales

Les fonctions causales sont très utilisées en électricité. Il s'agit tout simplement de fonctions nulles sur $]-\infty ; 0]$.
Pour les exprimez, on utilise la fonction de Heaviside qu'on multiplie par des fonctions usuelles. Représentez graphiquement les fonctions suivantes

1. $f_1 : x \mapsto \mathscr{U}(x)\sin x$

2. $f_2 : x \mapsto \mathscr{U}(x)\sin(x-\pi)$

3. $f_3 : x \mapsto \mathscr{U}(x-\pi)\sin x$

4. $f_4 : x \mapsto \mathscr{U}(x-\pi)\sin(x-\pi)$

Exercice 6 Limite en l'infini d'une fonction rationnelle

Chacune des fonctions f ci-dessous est définie sur $]1;+\infty[$. Pour chacune d'entre elle, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

1. $f(x)=-\frac{4x}{x-1}$ **2.** $f(x)=\frac{1-2x}{1-x^2}$ **3.** $f(x)=-\frac{2x}{(x-1)^2}$

Exercice 7 Limites d'une fonction rationnelle, asymptotes

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]1,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{2x+1}{1-x}.$$

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 1.

3. Déduire des questions précédentes que la courbe représentative de f admet deux asymptotes. Donner une équation de chacune de ces asymptotes.

Exercice 8 Asymptote et fonction rationnelle

On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par

$$f(x)=x+3+\frac{2}{x+1}.$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$.

2. Que peut-on en déduire comme asymptote pour la courbe représentative C de f ?

3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x)-(x+3)\right]$.

5. Que peut-on en déduire comme asymptote pour la courbe représentative C de f ?

Exercice 9 Asymptotes et fonction rationnelle bis

On considère la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{x^2+3x+1}{x-1}.$$

1. Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre $x\in]1,+\infty[$, on ait

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$$

2. En déduire que la courbe représentative C de f admet une asymptote oblique Δ dont on donnera une équation.

3. Étudier la position de C par rapport à Δ sur l'intervalle $]1,+\infty[$.

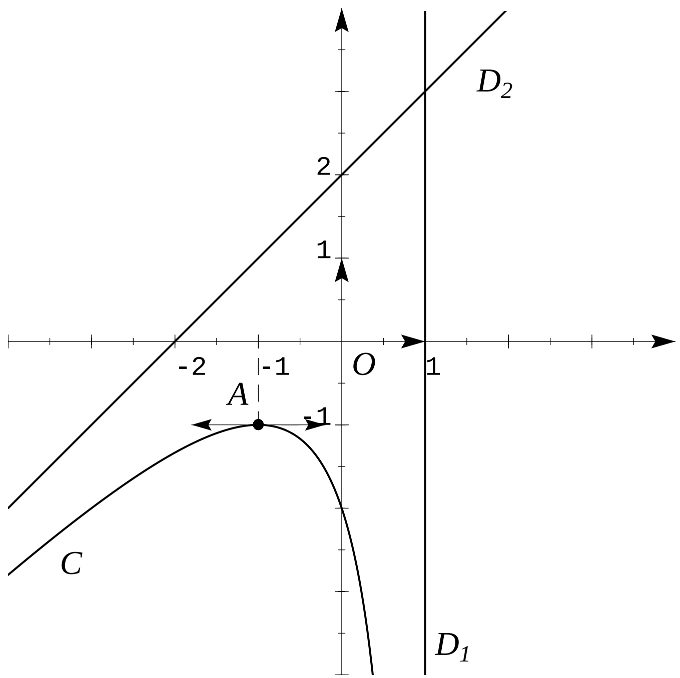
4. Montrer que la courbe C admet une autre asymptote dont on donnera une équation.

Exercice 10 Lecture de graphique

La courbe C représentée ci-dessous est la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+d},$$

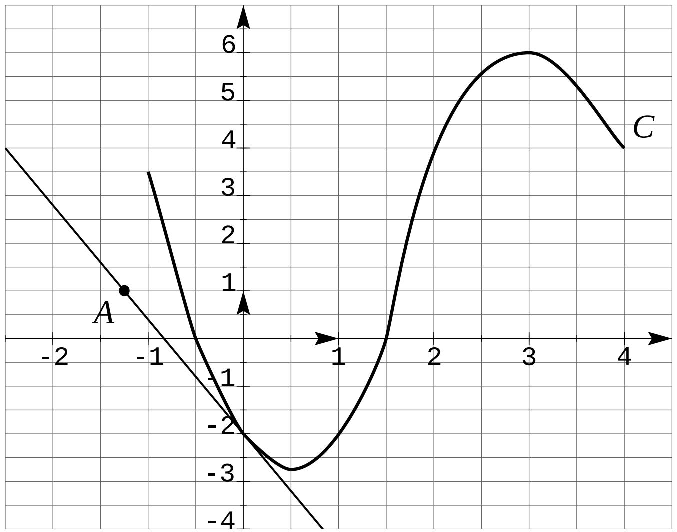
où a, b, c et d sont quatre nombres réels que l'on se propose de déterminer.



1. On admet que les droites D_1 et D_2 sont les asymptotes de la courbe C. Déduire du graphique une équation de chacune de ces asymptotes.
2. En utilisant la question précédente, et en remarquant que la courbe C passe par le point A(−1, −1), déterminer les nombres réels a, b, c et d.

Exercice 11 Lecture de graphique, tangente

La courbe C donnée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $[-1;4]$, dans un repère orthogonal d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.



1. Résoudre graphiqement les équations suivantes :
2. $f(x) = 0$;
3. $f(x) = 3,5$;
4. $f'(x) = 0$.
5. Utiliser la courbe C pour donner le tableau de variations de f.
6. En déduire le signe de $f'(x)$.
7. La droite T tangente à la courbe C au point B d'abscisse $x = 0$ passe par le point A de coordonnées $(-5/4; 1)$.
8. Déterminer une équation de T par le calcul.
9. En déduire $f'(0)$.

Exercice 12 Calculs de dérivées

Calculer la fonction dérivée pour chacune des fonctions suivantes :

1. • **un polynôme :** f définie sur $\mathbb{R}$ par · $f(x) = -3x^4 + 6x^2 + 1$
2. • **un produit de polynômes :** f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (-x+2)(3x+7)^2$
3. • **un inverse :** f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
4. • **une somme d'inverses :** f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{4}{x^3}$.
5. • **une fraction :** f définie sur $]3; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{3x-7}{-x+3}$.
6. • **une puissance de fonction trigo :** f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin^2 x$.

Exercice 13 Calculs de dérivées - Études de signes

Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer la fonction dérivée f' et étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$ (ou sur l'intervalle précisé le cas échéant).

1. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + 4x^2 - 5x + 1$
2. $f(x) = \dfrac{2}{3x-1}$ pour $x \neq -\dfrac{1}{3}$
3. $f(x) = \dfrac{2x-6}{x+1}$ pour $x \neq -1$
4. $f(x) = x\sqrt{x}$ pour $x \geq 0$
5. $f(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^2}$ pour $x \neq -1$
6. $f(x) = 2 - \dfrac{1}{1+x}$ pour $x \neq -1$
7. $f(x) = \sqrt{2x-1}$ pour $x \geq \dfrac{1}{2}$
8. $f(x) = \dfrac{x+1}{2} - \dfrac{2}{x+1}$
9. $f(x) = \dfrac{x}{2} + 1 - \dfrac{1}{x}$
10. $f(x) = \dfrac{x^2-6x+8}{x^2+1}$
11. $f(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right), x \in [0, \pi]$
12. $f(x) = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right), x \in [0, \pi]$

Exercice 14 Problème d'optimisation

Les molécules d'un gaz enfermé dans un récipient à la température T sont animées d'une vitesse de v cm.s^{-1}. Cet état d'équilibre est caractérisé par la fonction de distribution de vitesse de MAXWELL-BOLTZMANN

$$F(v) = cv^2\, e^{-mv^2/(2kT)}$$

où T est la température (en K), m la masse d'une molécule et c et k des constantes positives.
Montrez que la valeur maximale de F a lieu en $v = \sqrt{2kT/m}$.

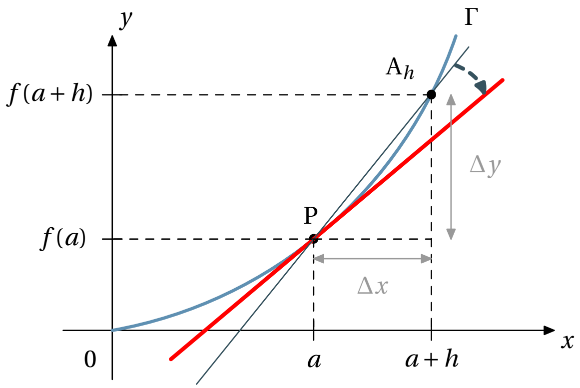
Quelques rappels sur la dérivation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit a un élément I.
*On dit que **f est dérivable en a** lorsque le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand x tend vers a. Cette limite est alors appelée **dérivée de f en a**, et est notée $f'(a)$:*

$$f'(a) = \lim_{x\to a, x\neq a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

ou encore

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



Approximation locale d'une courbe par sa tangente
Au voisinage de d'un nombre a où f est dérivable,

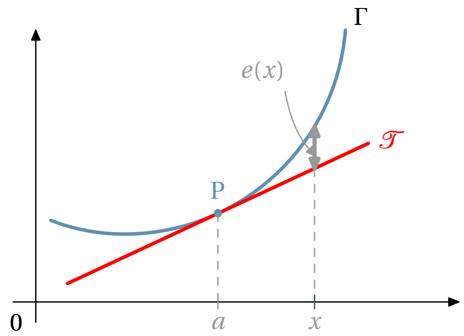
$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)e(x) \quad \textit{avec} \lim_{x\to a} e(x) = 0$$

c'est à dire

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + o(x-a)$$

ou encore

$$f(x) \underset{a}{\sim} f(a) + (x-a)f'(a)$$



Dérivée de fonctions composées *Si g est dérivable en x_0 et f dérivable en $g(x_0)$ alors la fonction composée $f\circ g$ est dérivable en x_0 et*

$$(f\circ g)'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big) \times g'(x_0)$$

Exercice 15 Calculs de dérivées

$$a(x) = \big(\cos(x)^6\big) \quad b(x) = \frac{1}{\ln x} \quad c(x) = \sqrt{1+e^{-2x}} \quad d(x) = e^{\sin x} \quad \big(x^2+x+3\big)^{3/2} \quad e(x) = \ln(\ln x)$$

$$f(x) = \ln(\ln(\ln(lnx))) \quad g(x) = \frac{2\sqrt{x}}{1+x} \quad h(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad i(x) = \frac{j\omega x}{(j\omega x)^2 + 3j\omega x + 1}$$

Exercice 16 Tracer le graphe d'après la dérivée

Une question surgit dans votre esprit en ébullition. On connaît des fonctions dont les dérivées sont $x\mapsto x^2$, $x\mapsto x^1$, $x\mapsto x^0$, $x\mapsto x^{-2}$, $x\mapsto x^{-3}$, etc. mais on ne connaît pas de fonction du même type dont la dérivée est $x\mapsto \frac{1}{x}$. En existe-t-il une ?
Pour le savoir, nous allons utiliser notre fameuse approximation affine.

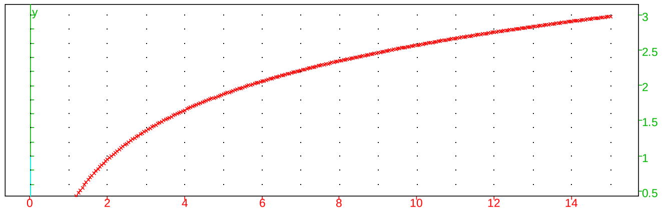
$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

pour h « suffisamment petit »
Nous en déduisons que $f(x+h) \approx h\times f'(x) + f(x)$.
Commentez alors le programme suivant

```
der2fonc(d,a,b,yo,h):={
   x:=a;
   y:=yo;
   P:=point(x,y);
pour j de a jusque b pas h faire
     y:=h*d(x)+y; x:=x+h; P:=P,point(x,y);
fpour;
couleur(P,rouge);
}:;
```

Observons maintenant le graphe de la fonction f qui a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $[0,1\,;\,15]$ avec $f(0,1) = -2,3$ et un pas de 0,05 :

```
der2fonc(x->1/x,0.1,15,-2.3,0.05)
```



Cette fonction semble donc exister ! Vous l'avez étudié l'an passé...

Exercice 17 Que fait ce programme ?

```
 gericault(f,a,p):={
d:=0;
h:=0.1;
tantque abs(D-d)>p faire
      D:=d;
      d:=(f(a+h)-f(a))/(h);
      h:=h/2;
ftantque;
return(d)
}:;
```

Un indice de plus :

```
gericault(x->ln(x),2,0.0001)
```

0.499902

Différentielle - Calculs d'erreur

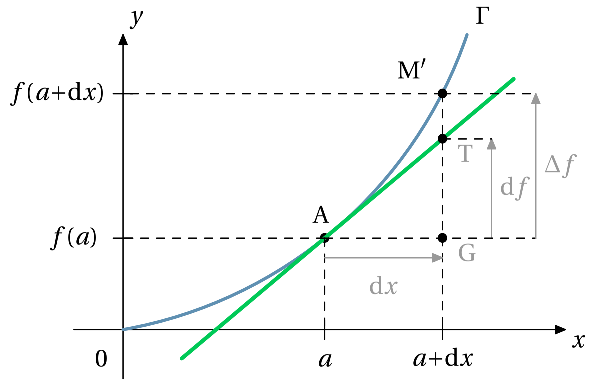
C'est ici que les torchons brûlent entre physiciens et mathématiciens ! La vision physicienne va apparaître aux yeux des mathématiciens comme une suite d'approximations naïves qui le rend incapable de comprendre le calcul différentiel dans son ensemble, sa cohérence quelque soit la dimension de l'ensemble de départ et d'arrivée, sa nature linéaire, sa simplicité, sa beauté...
Pour le physicien, tout ceci n'est que pédantisme des matheux qui voient peut-être de la simplicité et de la beauté dans le calcul différentiel, mais ils sont bien les seuls !
Comme vous êtes plutôt portés vers la physique, nous étudierons les différentielles du point de vue du physicien, mais, pour le plaisir, nous toucherons un mot plus mathématique. **Différentielle d'une fonction d'une variable** Soit f une fonction dérivable en a. On appelle **différentielle de f en a** l'application LINÉAIRE

$$h \mapsto h \times f'(a)$$

On (le physicien...) note $df = h \times f'(a)$. Or, si f est la fonction identité, c'est à dire si $f(x) = x$ pour tout réel x, alors $f'(a) = 1$ et donc $dx = 1 \times h$, et donc

$$df = f'(a)dx$$

C'est un peu tiré par les cheveux...
Reprenons un dessin connu pour mieux voir la situation :



Sachant que le point M *a pour coordonnées* $(a, f(a))$ *et que la tangente* (MT) *a pour coefficient directeur $f'(a)$, on a*

$$y_T - y_G = f'(a)dx = df$$

Continuons à « magouiller ». Appelons dx (qui pour le mathématicien est une fonction) une petite variation autour de a, $\Delta f = f(a+dx) - f(a)$ et $df = f'(a)dx$ (qui était une fonction et devient une longueur...)

Alors $\Delta f - df = e(x)$, l'écart évoqué au début du chapitre et qui est négligeable devant dx. Donc

$$\Delta f \underset{0}{\sim} df$$

Ainsi, en physique, pour de « petites » variations, on assimilera df et Δf. Cela revient à ce que nous avons fait au paragraphe A-6

En pratique

Pourquoi tout ce pataquès ? Eh bien, vous savez par expérience qu'une formule physique est souvent donnée en fonction d'un produit, d'un quotient, d'une somme de grandeurs. Pour calculer l'erruer commises, il suffira d'utiliser les règles de dérivation

Opérations sur les différentielles et application aux calculs d'erreur

$$\begin{aligned}
\Delta(f+g) &\underset{0}{\sim} d(f+g) = df + dg \\
\Delta(fg) &\underset{0}{\sim} d(fg) = f\,dg + g\,df \\
\Delta\left(\frac{f}{g}\right) &\underset{0}{\sim} d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}
\end{aligned}$$

Un exemple *: vous verrez bientôt en physique les oscillations d'un pendule simple dont la période est $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ avec $\ell = 1m$ la longueur du pendule et $g = 9{,}80 m\cdot s^{-2}$ l'accélération de la pesanteur. On veut calculer la variation de T si ℓ varie de $1cm$.*
On calcule d'abord l'erreur absolue, à savoir approximativement la différentielle de T.

$$dT = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} d\sqrt{\ell} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \frac{1}{2\sqrt{\ell}} d\ell = \frac{\pi}{\sqrt{\ell g}} d\ell$$

On obtient $dT \approx 10^{-2} s$

Erreur relative

Le physicien sera plutôt intéressé par l'erreur relative d'un résultat : en effet, l'eereur absolue ne veut pas dire grand chose en elle-même. Une erreur d'un kilo sur un pétrolier c'est peu, sur une maquette de planeur en balsa c'est beaucoup.
On est donc amené à calculer $\frac{\delta f}{f}$, c'est à dire $\frac{df}{f}$. Le « truc », c'est de remarquer que

$$\frac{df}{f} = d(\ln f)$$

et donc

Dérivée logarithmique et erreur relative

$$\begin{aligned}
\frac{d(fg)}{fg} &= d(\ln(fg)) = d(\ln f) + d(\ln g) = \frac{df}{f} + \frac{dg}{g} \\
\frac{df^n}{f^n} &= d(\ln f^n) = d(n\ln f) = n\frac{df}{f} \\
\frac{d(f/g)}{f/g} &= d(\ln(f/g)) = d(\ln f - \ln g) = d(\ln f) - d(\ln g) = \frac{df}{f} - \frac{dg}{g}
\end{aligned}$$

Par exemple, étudions la méthode de Bessel en focométrie (!)

$$f' = \frac{D^2 - \ell^2}{4D}$$

Calculons l'erreur relative $\frac{\Delta f'}{f'}$ sur f' en calculant $\left|\frac{df'}{f'}\right|$

$$\left|\frac{df'}{f'}\right| = \left|\frac{d(D^2-\ell^2)}{D^2-\ell^2} - \frac{d(4D)}{4D}\right| = \left|\left(\frac{2D}{D^2-\ell^2} - \frac{1}{D}\right) dD - \frac{2\ell}{D^2-\ell^2}\, d\ell\right|$$

Donc

$$\frac{\Delta f'}{f'} = \left|\frac{2D}{D^2-\ell^2} - \frac{1}{D}\right| \Delta D - \left|\frac{2\ell}{D^2-\ell^2}\right| \Delta\ell$$

AN : $D = 1m$, $\Delta D = 1mm$, $\ell = 30cm$ et $\Delta\ell = 1mm$

Normalement on trouve une erreur relative d'environ 0,18%

Exercice 18 Calcul d'erreur

Dans un essai de flexion 3 points, le module d'Young est donné par

$$E = \frac{FL^3}{4fbh^3}$$

avec F la force exercée sur l'éprouvette, L la longueur entre appuis de l'éprouvette, f la flèche, b la largeur de l'éprouvette et h la hauteur de l'éprouvette.

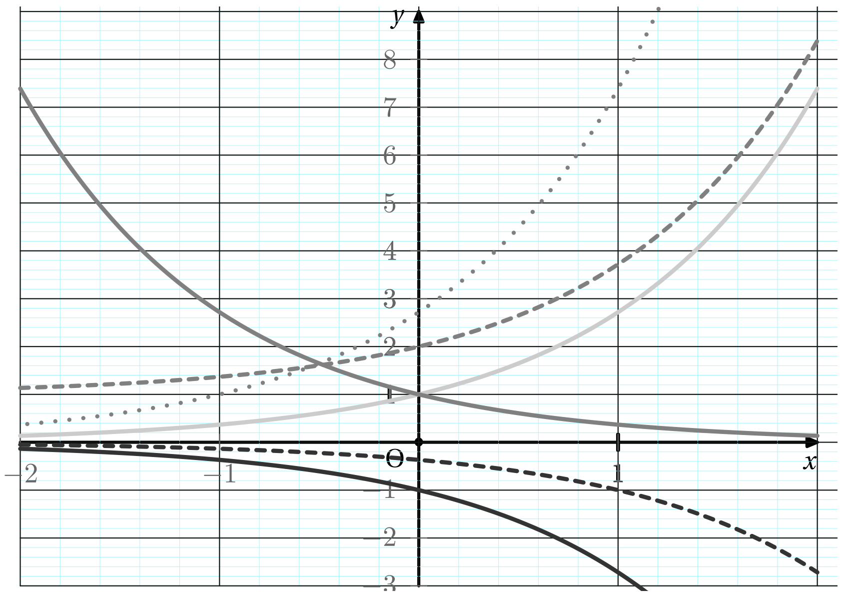
Donnez l'expression de l'erreur relative absolue $\left|\frac{dE}{E}\right|_{max}$ en fonction des erreurs dF, dL, df, db et dh sur les différentes grandeurs.

I - Fonction exponentielle

Exercice 19 Lecture graphique

Reconnaître parmi les figures ci-contre les courbes représentatives des fonctions suivantes :

- ▷ $x \mapsto e^{-x}$
- ▷ $x \mapsto e^{x}$
- ▷ $x \mapsto e^{x+1}$
- ▷ $x \mapsto e^{x}+1$
- ▷ $x \mapsto -e^{x}$
- ▷ $x \mapsto -e^{x-1}$



Exercice 20 Propriétés algébriques

Simplifiez au maximum les expressions suivantes :

1. $e^{x}e^{-x}$
2. $e^{x}e^{-x+1}$
3. ee^{-x}
4. $\left(e^{-x}\right)^2$
5. $\dfrac{e^{2x}}{e^{2-x}}$
6. $\dfrac{\left(e^{x}\right)^3}{e^{2x}}$
7. $e^{x}\left(e^{x}+e^{-x}\right)$
8. $\left(e^{x}\right)^5\left(e^{-2x}\right)^2$
9. $e^{-3x+1}\left(e^{x}\right)^3$
10. $\sqrt{e^{-2x}}$
11. $\dfrac{e^{-4x}e}{\left(e^{-x}\right)^2}$
12. $\left(e^{x}+e^{-x}\right)^2 - \left(e^{x}-e^{-x}\right)^2$
13. $\left(e^{x}-e^{-x}\right)^2 - e^{-x}\left(e^{3x}-e^{-x}\right)$
14. $\left(e^{x}-e^{-x}\right)\left(e^{2x}+e^{x}+1\right)$

Exercice 21 Dérivées

Calculez les dérivées et les limites aux bornes des ensembles de définitions des fonctions définies par les expressions suivantes :

1. $f_1(x)=e^{x}+x^2+1$
2. $f_2(x)=5e^{x}+5xe^{x}$
3. $f_3(x)=e^{x}\sin(x)$
4. $f_4(x)=\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$
5. $f_5(x)=\dfrac{3x+1-e^{x}}{e^{x}}$
6. $f_6(x)=x^3e^{-x}$
7. $f_7(x)=\dfrac{x^2e^{x}}{x+1}$
8. $f_8(x)=\dfrac{e^{x}}{x}$
9. $f_9(x)=\dfrac{1}{e^{x}}$
10. $f_{10}(x)=\left(e^{x}\right)^2+\dfrac{1}{e^{x}}$
11. $f_{11}(x)=e^{-x}$
12. $f_{12}(x)=e^{4x+1}$
13. $f_{13}(x)=e^{\cos(x)}$
14. $f_{14}(x)=e^{5x^3+7x+4}$
15. $f_{15}(x)=(x+1)e^{-x+1}$
16. $f_{16}(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{x}$

Exercice 22 Le gaz

Les molécules d'un gaz enfermé dans un récipient à la température T sont animées d'une vitesse de v cm.s^{-1}. Cet état d'équilibre est caractérisé par la fonction de distribution de vitesse de MAXWELL-BOLTZMANN

$$F(v)=cv^2\,e^{-mv^2/(2kT)}$$

où T est la température (en K), m la masse d'une molécule et c et k des constantes positives.
Montrez que la valeur maximale de F a lieu en $v=\sqrt{2kT/m}$.

Exercice 23 Loi normale

En statistiques, la *distribution normale* est définie par la fonction de densité de probabilité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad \text{où} \quad z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

μ est la moyenne de cette distribution et σ^2 la variance. L'étude de cette fonction est utilisée dans des domaines qui vont de la mécanique quantique à la répartition des notes du baccalauréat. Étudiez cette fonction (sens de variation, limites) et tracez la courbe représentative de f.

Exercice 24 Electicity

On considère un circuit électrique composé d'une force électromotrice U, d'une résistance R et d'une inductance L. L'intensité du courant I varie en fonction du temps t selon la formule

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{R}}\left(1 - e^{-\mathrm{R}t/\mathrm{L}}\right)$$

On considère que R est la seule variable indépendante, *i.e.* U, L et t sont considérés comme des constantes et R comme une variable. Calculez $\lim\limits_{\mathrm{R}\to 0\ \mathrm{R}>0} \mathrm{I}$.

Exercice 25 Panthère rose

La loi de Newton sur le refroidissement dit que la vitesse de refroidissement d'un objet est proportionnelle à l'écart de température entre l'objet et le milieu ambiant.
L'inspecteur CLOUSEAU arrive sur les lieux d'un meurtre à 9 :00. Il commence par prendre la température de la victime : 30˚C. Une heure plus tard, la température du corps est tombée à 29˚C. Sachant que la température normale du corps d'une personne vivante en bonne santé est de 37˚C, que la victime était syldave, qu'elle aimait les films de gladiateurs et se trouvait dans une pièce maintenue à 0˚C, estimez l'heure du décès de la victime et la couleur de ses yeux.

Exercice 26 Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de g.

2. Justifier que pour tout x, $\left(\mathrm{e}^x - x\right)$ est strictement positif.

Partie B

1. a) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
b) Interpréter graphiquement les résultats précédents.

2. a) Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.
b) Étudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations.

3. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
b) À l'aide de la **partie A**, étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (T).

4. Tracer la droite (T) les asymptotes et la courbe $(\mathscr{C})$.

Exercice 27 Puissance réelle d'un réel

Pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel b, on pose $a^b = e^{b\ln a}$

1. Étudiez les fonctions $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$

2. Étudiez la fonction $\varphi : x \mapsto 2^x$.

3. Soient α et β deux réels. Étudiez $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{1+n^\beta}$.

Discutez selon le signe de β, puis selon celui de α

Exercice 28 Calcul de dérivées

Calculez les dérivées des fonctions définies par

1. $a(x) = \ln(\ln x)$ **2.** $b(x) = \ln(\ln(\ln(\ln x)))$ **3.** $c(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Retour sur les primitives

Complétez le tableau suivant

f	Je pose $u =$	Alors $u' =$	Forme de f en fonction de u et u'	Une primitive de f est
$\dfrac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}$				
$\dfrac{\cos(2x)}{(3+\sin(2x))^3}$				
$\dfrac{(\ln x)^2}{x}$				
$x\sqrt{x^2-1}$				
$16\dfrac{e^x}{1+2e^x}$				
$\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$				
$\dfrac{1}{x\ln x}$				
$\dfrac{e^x}{(2+e^x)^3}$				
$xe^{-x^2/2}$				
$\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$				
$\cos(x)\sin^5(x)$				

Échelles semi-logarithmiques

Exercice 29 Un petit préambule : logarithme décimal

La fonction log : $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ définie pour $x > 0$ est appelée **fonction logarithme décimale**

Étudiez brièvement cette fonction et mettez en évidence ses principales propriétés algébriques.

On considère un repère où l'axe des abscisses est gradué comme d'habitude et où l'axe des ordonnées est gradué en échelle logarithmique, c'est à dire qu'une unité étant choisie, la $k-i$ème unité correspond à une ordonnée de 10^k.
Représentez dans un tel repère les fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto 10^x$

2. $f_2 : x \mapsto 32 \times 10^x$

3. $f_3 : x \mapsto 0,32 \times 10^x$

4. $f_4 : x \mapsto e^x$

5. $f_5 : x \mapsto e^{-32x}$

Exercice 30 Décibels

Si G est une grandeur et G′ une nouvelle grandeur, les nombres $\mathrm{G}'-\mathrm{G}$ ou $\mathrm{G}'/_{\mathrm{G}}$ ou $\mathrm{G}'-\mathrm{G}/_{\mathrm{G}}$ peuvent être trop grands ou trop petits pour être interprétés. On utilise alors une échelle logarithmique (de base 10). En supposant G et G′ strictement positifs, on calcule ainsi $\log_{10}\dfrac{\mathrm{G}'}{\mathrm{G}}$ et le résultat est exprimé en **Bel**. On utilise plus couramment $10\log_{10}\dfrac{\mathrm{G}'}{\mathrm{G}}$ qui est exprimé en **décibel** si G et G′ sont des grandeurs utilisées en acoustique, électronique, télécommunications (Bel vient de Graham BELL, l'inventeur du téléphone).
Si $\log_{10}\dfrac{\mathrm{G}'}{\mathrm{G}}$ est positif, on parle de gain et sinon d'atténuation ou de perte.

Attention aux vendeurs de lave-vaisselle ou d'aéroports !

Soit P_0 la puissance fournie à l'entrée d'un appareillage et P_1 la puissance de sortie.

1. On vous dit que l'atténuation de la puissance est de 3 dB. Que peut-on en déduire pour P_1/P_0 ?
2. Que dire du gain en décibels si $P_1/P_0 = 10\,? = 100\,? = 200\,?$

Exercice 31 Fonctions de transfert en électronique

Un circuit peut être caractérisé par sa fonction de transfert T dépendant de la pulsation ω de la tension sinusoïdale.
On s'intéresse souvent à la courbe de gain associée représentant la fonction

$$G : \omega \mapsto 20 \log |T(\omega)|$$

où le gain G est exprimé en décibels.
Par commodité, l'axe des ordonnées est gradué en échelle décimale, et l'axe des abscisses ω est gradué en échelle log.

1. **Un exemple** Représentons la courbe de gain de la fonction

$$T_1 : \omega \mapsto j\frac{\omega}{\omega_0}$$

Tout d'abord, rappelez-vous qu'en électronique, j représente le nombre de carré -1.

$G_1(\omega) = 20 \log |T_1(\omega)| = 20 \log \omega - 20 \log \omega_0$. L'axe des abscisses étant gradué en échelle log, on pose $x = \log \omega$, alors le gain est représenté par la courbe d'équation

$$y = 20x - 20 \log \omega_0$$

qui est donc une droite qu'on notera dans la suite du problème $(\mathscr{D})$. On dit que sa pente est de 20 décibels par décade.

Pour la tracer, on peut déterminer les coordonnées de deux points :

▷ pour $\omega = \omega_0$, $G_1(\omega) = 20 \log 1 = 0$

▷ pour $\omega = 10\omega_0$, $G_1(\omega) = 20 \log 10 = 20$

2. On va s'intéresser maintenant à la fonction

$$T_2 : \omega \mapsto 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}$$

a) Regardez ce qui se passe au voisinage de 0, c'est à dire étudiez la limite de G_2 lorsque ω tend vers 0 et interprétez graphiquement.

b) Que sentez-vous au voisinage de $+\infty$? Montrez que $(\mathscr{D})$ est asymptote à la courbe représentative de G_2 au voisinage de $+\infty$.

3. Essayez de vous débrouillez avec

$$T_3 : \omega \mapsto \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

(ya une ruse...)

Exercice 32 Étude du pont de Wien

Il s'agit d'un circuit obtenu en plaçant en séries deux filtres F_1 et F_2, F_1 étant un filtre R-C série et F_2 un filtre R-C en parallèle. Les deux resistances sont identiques et les deux condensateurs aussi. L'entrée est une tension $e(t)$ de pulsation ω, la sortie étudiée est la tension aux bornes de la résistance placée dans le filtre F_2.
Dans tout le problème, on posa $\tau = RC$ et la fonction de transfert est notée $T(j\omega)$, avec $j^2 = -1$.
Vous verrez peut-être un jour que la notion de pont diviseur permet d'obtenir que

$$T(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{j^2\tau^2\omega^2 + 3j\omega\tau + 1}$$

1. Commencez par faire le schéma du circuit pour faire savant.
2. On pose à présent $x = \omega\tau$

a) Montrez que

$$\left|T(j\omega)\right| = \frac{x}{\sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}}$$

On posera par la suite, pour simplifiez encore nos notations (qui deviennent aussi nombreuses que les personnages dans un roman russe)

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}}$$

b) Calculez et écrivez sous la forme la plus simple possible la dérivée de f par rapport à x.

3. La fonction de gain normalisée est définie par

$$G(x) = 20 \log \left|f(x)\right|$$

On désigne par S la courbe associée à G dans un repère semi-log, x étant porté sur l'échelle logarithmique.

a) Montrez que $G(1/x) = G(x)$. Comment sont représentés l'un par rapport à l'autre les points images de x et $1/x$ sur l'échelle logarithmique ? Déduisez-en une propriété géométrique de S.

b) Calculez $\lim_{x \to +\infty} G(x) + 20 \log(x)$. Interprétez ce résultat.

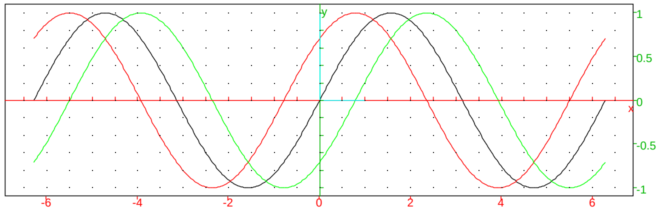
c) Construisez S.

Fonctions circulaires

Exercice 33 Déphasage

On a tracé dans le graphique ci-dessous les courbes représentatives de $f : x \mapsto \sin(x)$, $g : x \mapsto \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ et $h : x \mapsto \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.
Qui est qui ?

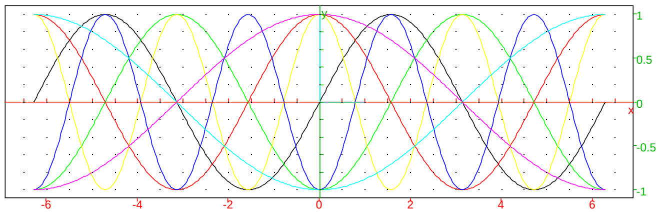
```
graphe([sin(x),sin(x+pi/4),sin(x-pi/4)],x=-2*pi..2*pi);
```



Exercice 34 Phase et amplitude

On a tracé dans le graphique ci-dessous les courbes représentatives de $f : x \mapsto \sin(x)$, $g : x \mapsto \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $h : x \mapsto \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$, $k : x \mapsto \sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$, $m : x \mapsto \sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$, $n : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{2}\right)$ et $p : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)$.
Qui est qui ?

```
graphe([sin(x),sin(x+pi/2),sin(x-pi/2),sin(2*x+pi/2),sin(2*x-pi/2)
    ,sin(x/2+pi/2),sin(x/2-pi/2)],x=-2*pi..2*pi);
```



Exercice 35 La phase cachée

On considère la fonction $f : x \mapsto \cos(3t)+\sin(3t)$. Montrez que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $A\sin(\omega t+\varphi)$. Déterminez A, ω et φ.

Exercice 36 Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 - \cos(x) - \frac{x^2}{2}$$

1. Déterminez la dérivée f' de f.
2. Déterminez la dérivée seconde f'' de f puis étudiez son signe.
3. Déduisez-en le sens de variations de f'. Dressez le tableau de variation de f' en faisant apparaître $f'(0)$.
   Déduisez-en les variations de f.
4. Montrez que pour tout réel x on a $1-\frac{x^2}{2} \leqslant \cos(x)$.
5. Tracez dans un repère orthonormal la courbe représentative de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Tableau récapitulatif des dérivées

$f(x) =$	$f'(x) =$	**intervalle de validité**
$a \in \mathbb{R}$		
x^n pour $n \in \mathbb{N}$		
$\dfrac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$		
$\sqrt{x}$		
$\ln x$		
$\exp x$		
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$		
$\cos x$		
$\sin x$		
$\tan x$		
$u + v$		
$\lambda u,\ \ \lambda \in \mathbb{R}$		
uv		
$\dfrac{u}{v}$		
$u \circ v$		