Les suites

I - Définition

Pour faire court, on pourrait se contenter de dire

Définition 1.1 (Suite numérique)
Une suite numérique réelle est une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$

Mais développons un peu. Considérons par exemple la suite définie par[a] $u_n = \sqrt{2n+1}$.
La suite u qu'on note encore $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou même (u_n), est la fonction qui, à n'importe quel **entier** n associe le **réel** $\sqrt{2n+1}$
On pourra donc parler de *limite* de la suite (u_n), c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2n+1}$
Si ce n'est qu'une fonction, pourquoi lui avoir donné un nom spécial ?

II - Inerprétation physique

Enfilons une blouse : et hop ! Nous voici devenus physiciens (enfin presque...).
Laissons tomber un objet dans un tube où nous avons au préalable fait le vide. Notons h_n la distance parcourue par l'objet au bout de n secondes :
$h_0 = 0\text{m}$, $h_1 = 4{,}9\text{m}$, $h_2 = 19{,}6\text{m}$, $h_3 = 44{,}1\text{m}$, $h_4 = 78{,}4\text{m}$.
Avec un bon sens de l'observation, nous remarquons que

$$h_n \simeq \frac{1}{2} g n^2$$

avec $g \simeq 9{,}81\text{ms}^{-2}$ et n le *rang* de la mesure correspondant ici au nombre de secondes écoulées depuis le début de la chute.
Nous avons ainsi tout naturellement construit une $suite$ de mesures qui est en fait une suite numérique de *terme général* $h_n = 4{,}905n^2$.
Aurait-il été plus simple de noter $h(t) = 4{,}905t^2$ avec t le temps en secondes et $h(t)$ la hauteur en mètres ?
Attention ! Nous avons pris des mesures chaque seconde. Rien ne nous dit qu'entre chaque mesure il ne se passe pas des choses extrêmement bizarres. Bien sûr le physicien généralisera le résultat à n'importe quelle valeur de t, entière ou non, car il a en poche des lois qui le lui permettent : il passe naturellement du $discret$ au $continu$
Hors d'un contexte physique, un mathématicien aura besoin d'être convaincu avant de pouvoir généraliser
Considérez par exemple la suite de terme général

$$u_n = \sin(n\pi)$$

En fait, u_n est toujours nul.
Considérez maintenant la fonction définie pour tout réel t par $f(t) = \sin(t\pi)$...
Par exemple $f(1/2) = \sin(\pi/2) = 1$ donc la fonction f n'est pas nulle partout.
Imaginez un physicien prenant chaque seconde des mesures d'un phénomène obéissant à cette loi[b] : il pourrait conclure qu'après avoir jeté un caillou dans l'eau, la surface reste immobile...
Pour en revenir à nos moutons, une suite numérique peut apparaître comme une « suite de mesures » à intervalles de temps réguliers : garder cette image en tête pourra peut-être vous aider à mieux appréhender l'étude des suites.

[a] On dit aussi de terme général $u_n = \sqrt{2n+1}$
[b] par exemple une onde se propageant à la surface de l'eau

III - Suites arithmétiques

Définition 1.2 (Suite arithmétique)
Une suite (u_n) est arithmétique lorsqu'il existe un réel b tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + b$$

On appelle b la raison de la suite

Les propriétés suivantes seront admises

Propriété 1.1
Étant donné une suite arithmétique de raison b

- ▷ $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nb$
- ▷ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{1er terme}+\text{dernier terme})}{2} = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$

En particulier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

IV - Suites géométriques

Définition 1.3 (Suite géométrique)
Une suite (u_n) est géométrique lorsqu'il existe un réel a tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = a \cdot u_n$$

On appelle a la raison de la suite

Les propriétés seront admises.

Propriété 1.2
Étant donné une suite géométrique de raison a

- ▷ $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \cdot a^n$
- ▷ Si $a \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \text{premier terme} \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}} = u_0\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

En particulier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $q \neq 1$.
On utilise souvent le théorème suivant

Théorème 1.1 (Convergence des suites géométriques)
Une suite géométrique (u_n) de raison POSITIVE a converge si et seulement si $a \leqslant 1$

- ▷ Pour $0 \leqslant a < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
- ▷ Pour $a > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- ▷ Pour $a = 1$, (u_n) est constante.