Exercice 1

Huit sprinters effectuent deux $100\ m$. Leurs temps sont donnés dans le tableau suivant.

	Sprinter A	Sprinter B	Sprinter C	Sprinter D	Sprinter E	Sprinter F	Sprinter G	Sprinter H
Sprint 1	10"14	10"17	9"94	10"05	10"25	10"09	9"98	10"32
Sprint 2	10"41	9"97	9"96	10"12	10"19	10"24	10"12	10"17

Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant 8}$ les temps respectifs des coureurs au sprint 1 et $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant 8}$ les temps respectifs au sprint 2.

1) Calculer les moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$ des deux séries.

2) Calculer les écarts-types s_x et s_y des deux séries.

3) Lequel des deux sprints a été le plus homogène ?

Illustration

$N=8$	$\overline{x}=10.117500$ $\Sigma x=80.940000$ $\Sigma x^2=819.028000$ $V(x)=0.014694$ $\sigma_x=0.121218$ $Min(x)=9.940000$ $Q_1(x)=9.980000$ $Med(x)=10.090000$ $Q_3(x)=10.170000$ $Max(x)=10.320000$

$N=8$	$\overline{x}=10.147500$ $\Sigma x=81.180000$ $\Sigma x^2=823.922000$ $V(x)=0.018494$ $\sigma_x=0.135992$ $Min(x)=9.960000$ $Q_1(x)=9.970000$ $Med(x)=10.120000$ $Q_3(x)=10.190000$ $Max(x)=10.410000$

Exercice 2

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$ une famille de réels **ordonnés dans l'ordre croissant** de médiane m_e et de quartiles Q_1 et Q_3.
Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.
Soit $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$ la famille de réels définis par $y_i = ax_i + b$ pour tout i compris entre 1 et N (inclus).
Soit Q l'écart interquartile de $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$ et Q' celui de $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$.

Démontrer que $Q' = |a|Q'$.

Exercice 3

Soit $(x_i, n_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une série statistique avec effectifs de moyenne $\overline{x}$ et de variance V_x.

On note $N = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i$ l'effectif global et , $f_i = \dfrac{n_i}{N}$ la fréquence de x_i.

Soit g la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par : $g(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} f_i(x_i - t)^2$.

1) Calculer la dérivée de g.

2) En déduire les variations de g.

3) En déduire que la fonction g admet un minimum en $t = \overline{x}$. Que vaut ce minimum ?

Exercice 4

1) Calculer, pour chaque mois de l'année, le jour médian ainsi que les jours qui correspondent au premier quartile et au troisième quartile.

2) Même question pour une année entière de 365 jours.

Exercice 5

Le tableau suivant donne les effectifs des notes obtenues dans une classe en Maths et en Physique.

Notes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Maths	0	0	0	0	1	0	1	1	3	4	4	1	3	2	2	1	1	0	0	0	0
Physique	0	1	0	0	2	0	1	2	1	1	4	2	2	0	3	2	1	0	1	0	1

le but de cet exercice est de comparer la dispersion des notes en maths et en Physique.

1) Utilisation des quartiles.

- **a)** Calculer la médiane m_e et les quartiles Q_1 et Q_3 en Maths.
- **b)** Calculer la médiane m'_e et les quartiles Q'_1 et Q'_3 en Physique.
- **c)** Représenter les diagrammes en boîtes des notes en Maths et en Physique. Interpréter.

2) Utilisation des écarts-types.

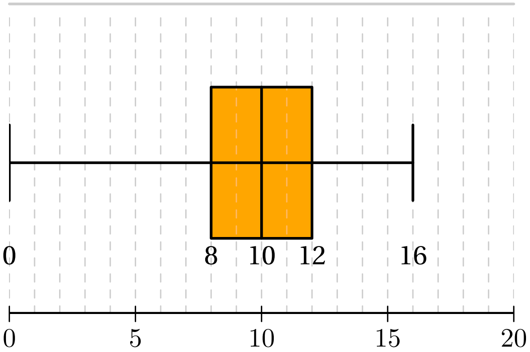
- **a)** Calculer la moyenne m des notes en Maths et la moyenne m' des notes en Physique. Interpréter.
- **b)** Calculer l'écart-type s des notes en Maths et l'écart-type s' des notes en Physique. Interpréter.
  On considérera que les notes en Maths et en Physique sont des grandeurs comparables et qu'il n'y a pas lieu de relativiser les écarts-types en utilisant des coefficients de variations.

Illustration

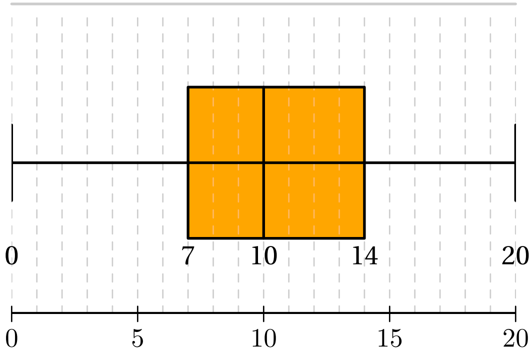
$N = 24$	$\overline{x} = 10.375000$ $\Sigma x = 249.000000$ $\Sigma x^2 = 2781.000000$ $V(x) = 8.234375$ $\sigma_x = 2.869560$ $Min(x) = 0.000000$ $Q_1(x) = 8.000000$ $Med(x) = 10.000000$ $Q_3(x) = 12.000000$ $Max(x) = 20.000000$

$N = 24$	$\overline{x} = 10.750000$ $\Sigma x = 258.000000$ $\Sigma x^2 = 3260.000000$ $V(x) = 20.270833$ $\sigma_x = 4.502314$ $Min(x) = 0.000000$ $Q_1(x) = 7.000000$ $Med(x) = 10.000000$ $Q_3(x) = 14.000000$ $Max(x) = 20.000000$

Maths



Physique



Exercice 6

Quarante candidats passent un examen noté de 0 à 20. Leur moyenne est de $9,5$ et l'écart-type est égal à 2.
On veut effectuer une péréquation affine afin d'obtenir une moyenne de 10 et un écart-type de3.
Notons $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant 40}$ les notes initiales et $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant 40}$ les notes obtenues aprés changement affine.

On a donc :
$\overline{x}=9$, $s_x=2$. On pose $y_i=ax_i+b$ où a $(a>0)$ et b sont á déterminer afin d'avoir $\overline{y}=10$ et $s_y=3$.

1) Exprimer $\overline{y}$ en fonction de a, b et $\overline{x}$.

2) Exprimer s_y en fonction de a et s_x.

3) En déduire les valeurs de a et b.
Quelle est la nouvelle note d'un candidat ayant initialement $5,6$? On arrondira á $0,1$ près.

4) Quelles doivent être les valeurs extrêmes des x_i afin que cette péréquation soit réalisable ? On arrondira à $0,1$ près.

Exercice 7 Lorsque les statistiques se contredisent

Le tableau suivant donne les temps de cinq sportifs qui ont couru un $1\,500\ m$ et un $5\,000\ m$.

	Coureur 1	Coureur 2	Coureur 3	Coureur 4	Coureur 5
$1\,500\ m$	3'58"17	4'05"48	4'12"97	4'08"29	4'00"12
$5\,000\ m$	14'58"12	14'47"08	15'37"85	13'57"70	14'48"34

On veut déterminer quelle est la course la plus homogène.

1) Utilisation des coefficients de variation.

- **a)** Calculer le temps moyen m, l'écart-type s puis le coefficient de variation $C_v = \dfrac{s}{m}$ pour le $1\,500\ m$. On pourra convertir tous les temps en secondes.
- **b)** Calculer le temps moyen m', l'écart-type s' puis le coefficient de variation $C'_v = \dfrac{s'}{m'}$ pour le $5\,000\ m$.
- **c)** Conclure

2) Utilisation de l'écart interquartile relatif.

- **a)** Déterminer la médiane m_e et les quartiles Q_1 et Q_3 pour le $1\,500\ m$.
  En déduire l'écart interquartile relatif $\dfrac{Q_3 - Q_1}{m_e}$.
- **b)** Déterminer la médiane m'_e et les quartiles Q'_1 et Q'_3 pour le $5\,000\ m$.
  En déduire l'écart interquartile relatif $\dfrac{Q'_3 - Q'_1}{m'_e}$.
- **c)** Conclure

3) Donner une explication à la contradiction entre 1.c) et 2.c).

Illustration

$N = 5$	$\overline{x} = 245.006000$ $\Sigma x = 1225.030000$ $\Sigma x^2 = 300284.738700$ $V(x) = 29.007704$ $\sigma_x = 5.385880$ $Min(x) = 238.170000$ $Q_1(x) = 240.120000$ $Med(x) = 245.480000$ $Q_3(x) = 248.290000$ $Max(x) = 252.970000$

$N = 5$	$\overline{x} = 889.818000$ $\Sigma x = 4449.090000$ $\Sigma x^2 = 3963982.328900$ $V(x) = 1020.392656$ $\sigma_x = 31.943586$ $Min(x) = 837.700000$ $Q_1(x) = 887.080000$ $Med(x) = 888.340000$ $Q_3(x) = 898.120000$ $Max(x) = 937.850000$

Exercice 8

Démontrer que :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2 = 2n^2V(x)$$

Exercice 9

Dans une usine, deux machines A et B produisent des pièces identiques.
On relève les diamètres des pièces (en mm) pour chaque machine :

Classe	$[105\ ;\ 106[$	$[106\ ;\ 107[$	$[107\ ;\ 108[$	$[108\ ;\ 109[$	$[109\ ;\ 110[$
Effectif A	15	20	25	35	180
Effectif B	5	7	10	68	177
Classe	$[110\ ;\ 111[$	$[111\ ;\ 112[$	$[112\ ;\ 113[$	$[113\ ;\ 114[$	$[114\ ;\ 115[$
Effectif A	200	12	8	3	2
Effectif B	180	20	12	5	3

Pour les calculs, on représentera chaque classe (intervalle) par son centre.

1) Calculer, pour chaque machine, le diamètre moyen et l'écart-type des pièces fabriquées.

2) On exige d'une machine qu'elle fabrique des pièces dont le diamètre moyen soit compris entre $109,5$ et $110,5$ et soit d'écart-type inférieur à $1,3$. Que pensez-vous des machines A et B ?

3) Etablissez le diagramme en boîtes suprposées pour ces deux séries.
Préciser pour chacune l'étendue et l'écart inter-quartile.

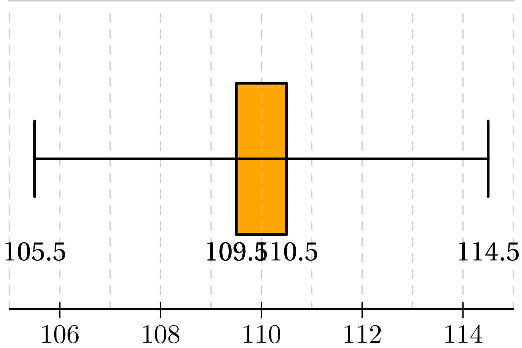
4) On appelle premier décile d'une série statistique la plus petite valeur telle qu'au moins $10\ \%$ des termes aient une valeur qui lui soit inférieure ou égale. On appelle neuvième décile d'une série statistique la plus petite valeur telle qu'au moins $90\ \%$ des termes aient une valeur qui lui soit inférieure ou égale.
Déterminer le premier et le neuvième décile notés respectivement D_1 et D_9.

Illustration

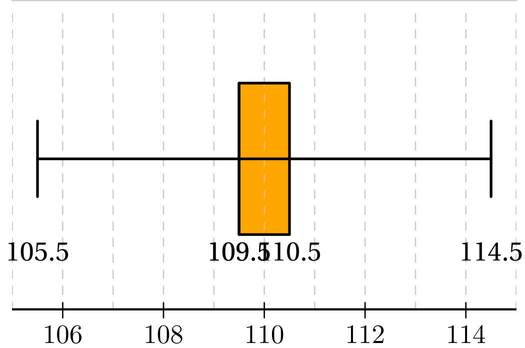
$N = 500$	$\overline{x} = 109.630000$ $\Sigma x = 54815.000000$ $\Sigma x^2 = 6010333.000000$ $V(x) = 1.929100$ $\sigma_x = 1.388920$ $Min(x) = 105.500000$ $Q_1(x) = 109.500000$ $Med(x) = 109.500000$ $Q_3(x) = 110.500000$ $Max(x) = 114.500000$

$N = 487$	$\overline{x} = 109.832649$ $\Sigma x = 53488.500000$ $\Sigma x^2 = 5875503.750000$ $V(x) = 1.478667$ $\sigma_x = 1.216005$ $Min(x) = 105.500000$ $Q_1(x) = 109.500000$ $Med(x) = 109.500000$ $Q_3(x) = 110.500000$ $Max(x) = 114.500000$

Machine A



Machine B



Exercice 10

Un aliment pour le bétail doit contenir $10\ \%$ d'un composant A. Pour savoir si un lot de $2\,000$ sacs de cet aliment est conforme, on pratique des mesures sur un échantillon de 100 sacs prélevés sur ce lot. la moyenne des résultats en composition de A doit être comprise entre $9,5\ \%$ et $10,5\ \%$ t l'écart-type ne doit pas excéder $1,5\ \%$.

Voici les résultats de quatre prélèvements faits sur quatre lots de $2\,000$ sacs :

Composition (en $\%$)	8	$8,25$	$8,5$	$8,75$	9	$9,25$	$9,5$	$9,75$
Lot 1	2	5	7	8	10	10	15	15
Lot 2	0	0	8	10	10	10	10	10
Lot 3	0	0	0	0	0	10	10	20
Lot 4	0	0	0	0	5	20	30	30

Composition (en $\%$)	10	$10,25$	$10,5$	$10,75$	11	$11,25$	$11,5$
Lot 1	15	8	3	2	0	0	0
Lot 2	10	10	10	10	2	0	0
Lot 3	20	20	10	10	0	0	0
Lot 4	15	0	0	0	0	0	0

Quelle sera la décision prise pour chaque lot ? On justifiera la réponse.

Illustration

$N = 100$	$\overline{x} = 9.430000$ $\Sigma x = 943.000000$ $\Sigma x^2 = 8934.250000$ $V(x) = 0.417600$ $\sigma_x = 0.646220$ $Min(x) = 8.000000$ $Q_1(x) = 9.000000$ $Med(x) = 9.500000$ $Q_3(x) = 10.000000$ $Max(x) = 11.500000$

$N = 100$	$\overline{x} = 9.675000$ $\Sigma x = 967.500000$ $\Sigma x^2 = 9413.125000$ $V(x) = 0.525625$ $\sigma_x = 0.725000$ $Min(x) = 8.000000$ $Q_1(x) = 9.000000$ $Med(x) = 9.750000$ $Q_3(x) = 10.250000$ $Max(x) = 11.500000$

$N = 100$	$\overline{x} = 10.000000$ $\Sigma x = 1000.000000$ $\Sigma x^2 = 10018.750000$ $V(x) = 0.187500$ $\sigma_x = 0.433013$ $Min(x) = 8.000000$ $Q_1(x) = 9.750000$ $Med(x) = 10.000000$ $Q_3(x) = 10.250000$ $Max(x) = 11.500000$

$N = 100$	$\overline{x} = 9.575000$ $\Sigma x = 957.500000$ $\Sigma x^2 = 9175.625000$ $V(x) = 0.075625$ $\sigma_x = 0.275000$ $Min(x) = 8.000000$ $Q_1(x) = 9.250000$ $Med(x) = 9.500000$ $Q_3(x) = 9.750000$ $Max(x) = 11.500000$

Exercice 11

Exercice 12

Exercice 13

Exercice 14

Exercice 15

Exercice 16

Exercice 17

Exercice 18

Exercice 19

Exercice 20

Exercice 21

Exercice 22

Exercice 23

Exercice 24

Exercice 25

Exercice 26

Exercice 27

Exercice 28

Exercice 29

Exercice 30

Exercice 31

Exercice 32

Exercice 33

Exercice 34

Exercice 35

Exercice 36

Exercice 37

Exercice 38

Exercice 39

Exercice 40

Exercice 41

Exercice 42

Exercice 43

Exercice 44

Exercice 45

Exercice 46

Exercice 47

Exercice 48

Exercice 49

Exercice 50