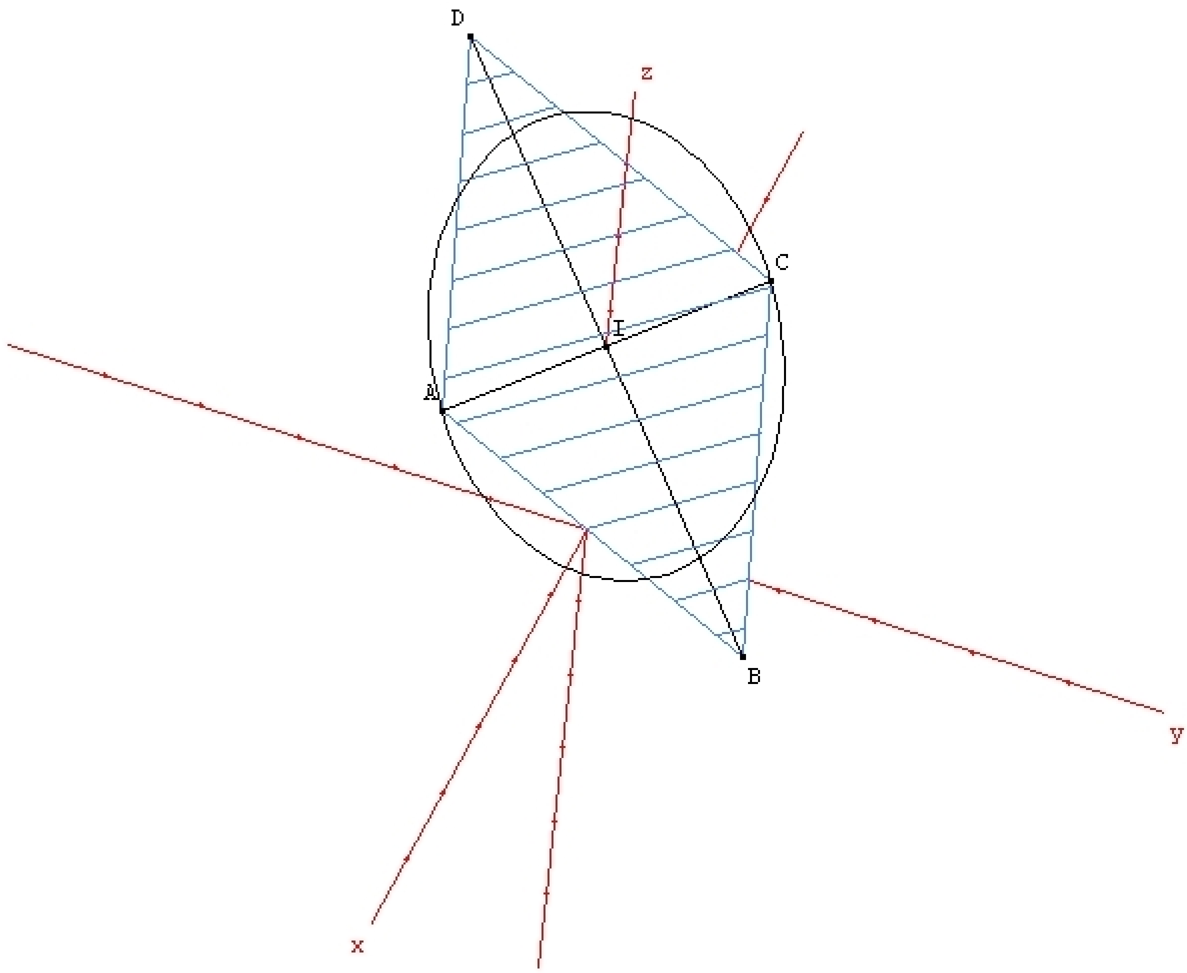
Exercice 1

On donne $A(2\ ;\ -1\ ;\ 3)$, $B(1\ ;\ 2\ ;\ 0)$, $C(-2\ ;\ 1\ ;\ 2)$ et $D(-1\ ;\ -2\ ;\ 5)$.

1) $ABCD$ est-il un parallélogramme ? Un rectangle ?

2) Calculer les coordonnées de l'isobarycentre du quadrilatère $ABCD$.

Figure Geospace

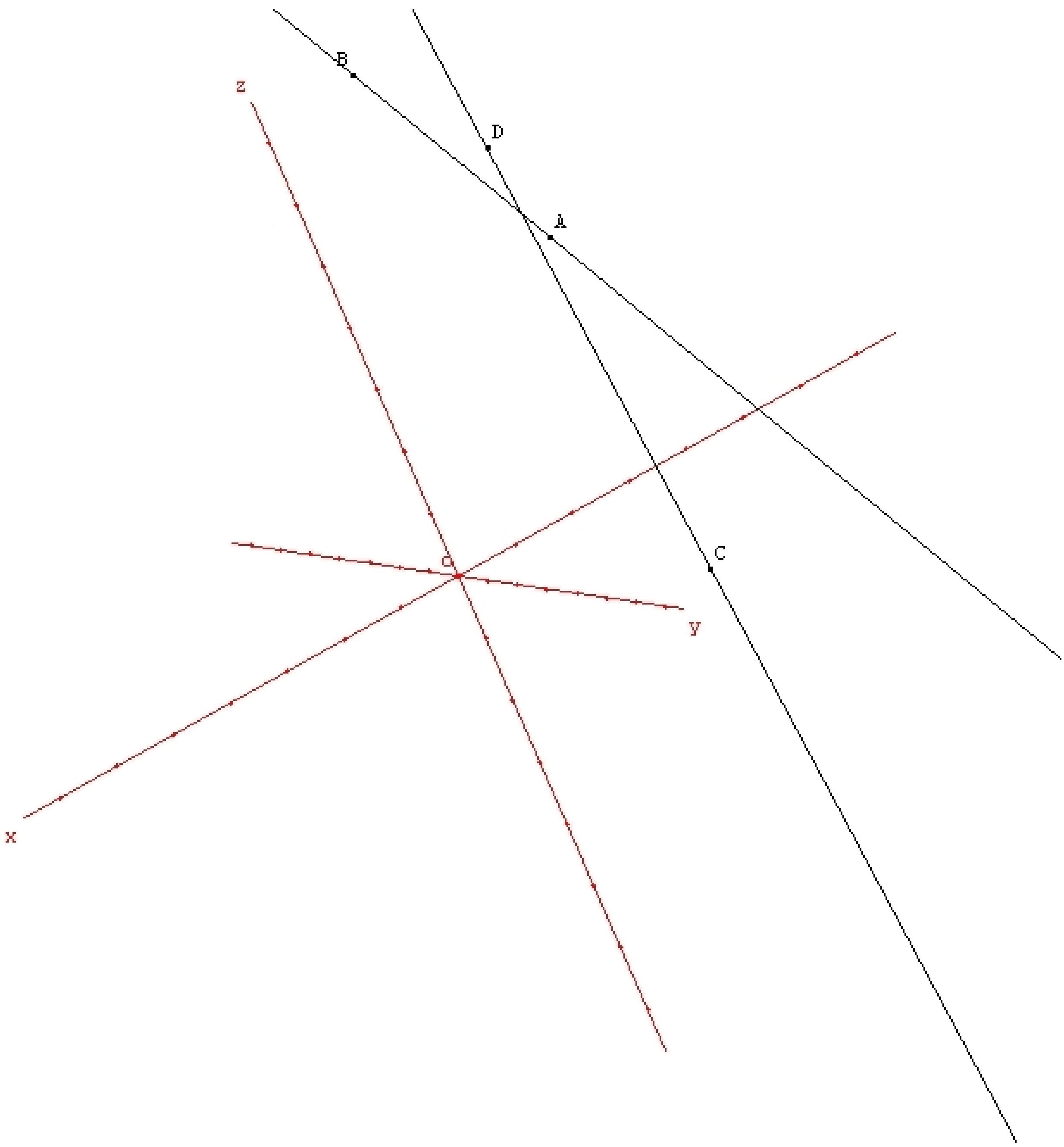


Exercice 2

On donne $A(-3\ ;\ 1\ ;\ 4)$, $B(-2\ ;\ -1\ ;\ 7)$, $C(-4\ ;\ -1\ ;\ -2)$ et $D(-5\ ;\ -5\ ;\ 4)$.

Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

Figure Geospace

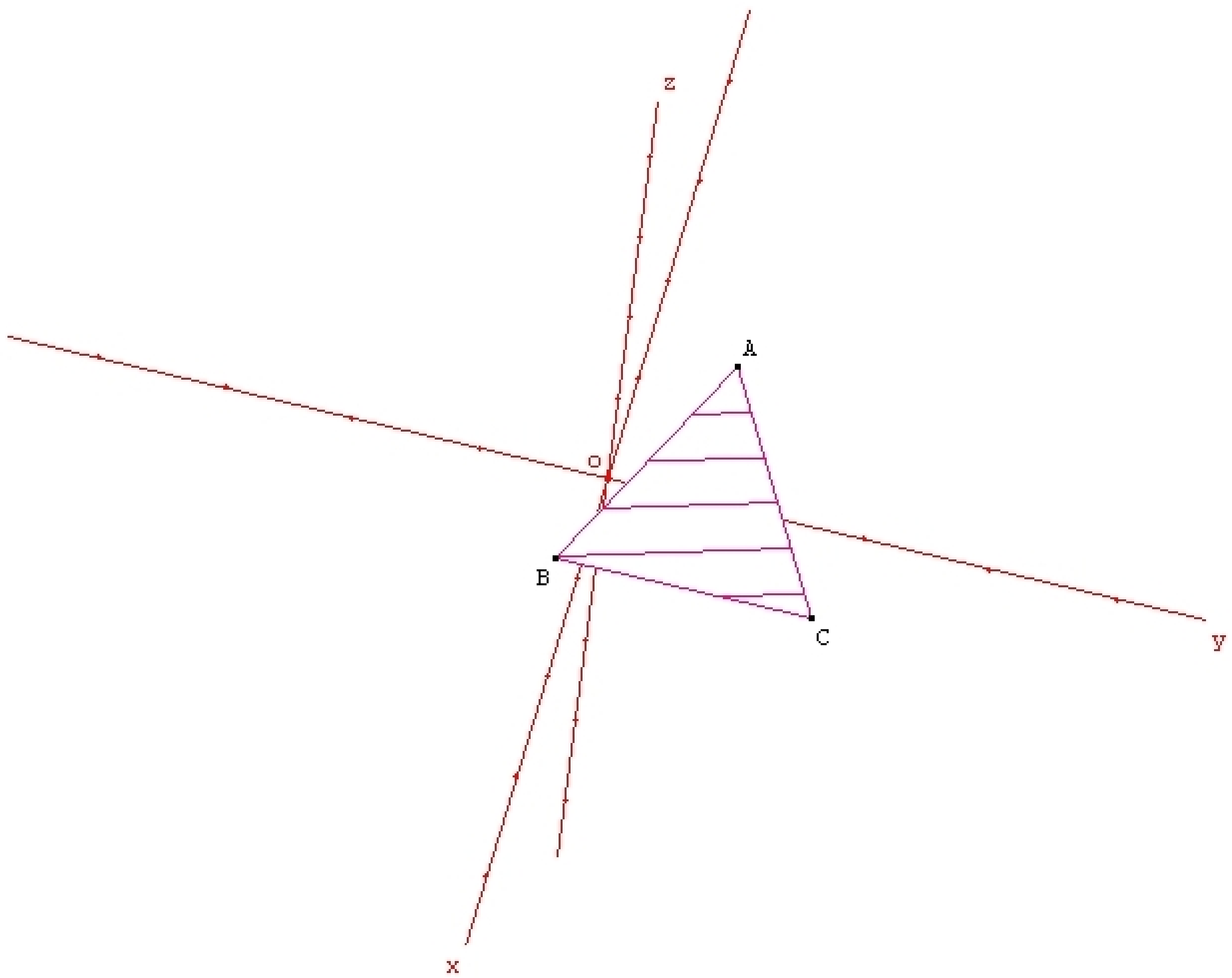


Exercice 3

On donne $A(1\ ;\ 1\ ;\ 3)$, $B\left(\sqrt{2}+1\ ;\ 0\ ;\ 2\right)$ et $C\left(\sqrt{2}+1\ ;\ 2\ ;\ 2\right)$.

Quelle est la nature du triangle ABC ?

Figure Geospace

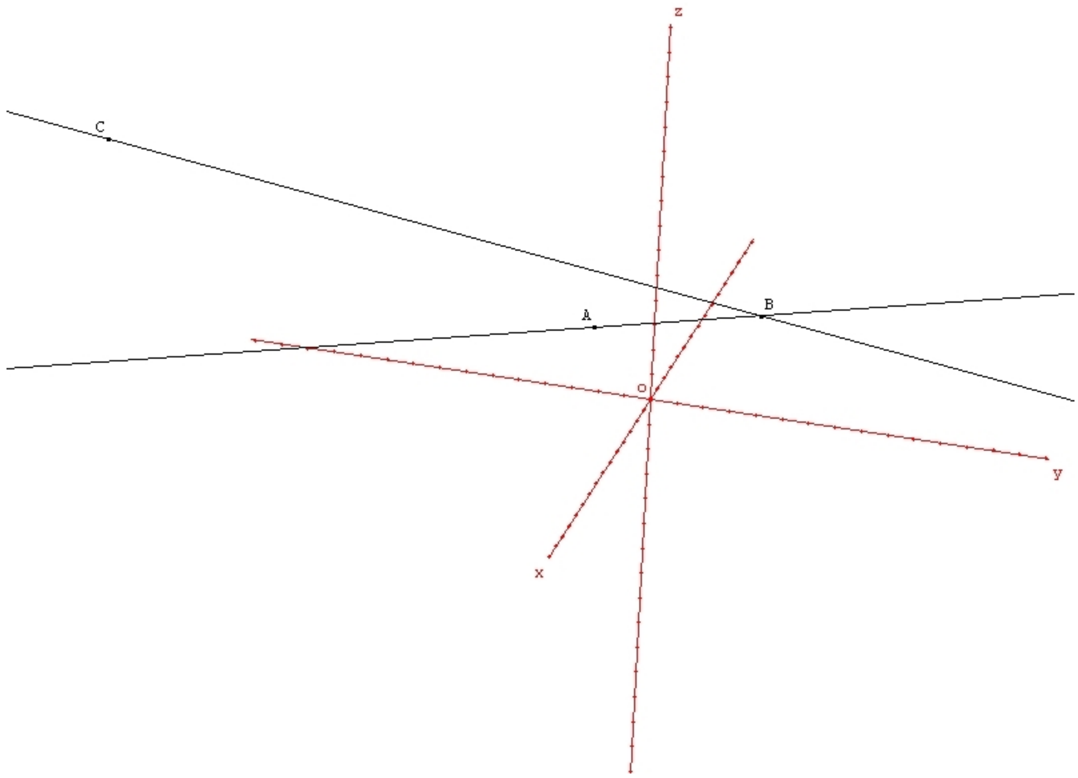


Exercice 4

On donne $A(1\ ;\ -2\ ;\ 3)$, $B(0\ ;\ 4\ ;\ 4)$ et $C(4\ ;\ -20\ ;\ 9)$.

Les points A, B et C sont-ils alignés ?

Figure Geospace



Exercice 5

$ABCD$ est un tétraèdre régulier d'arête a. On note G son centre de gravité.

1) Démontrer que :

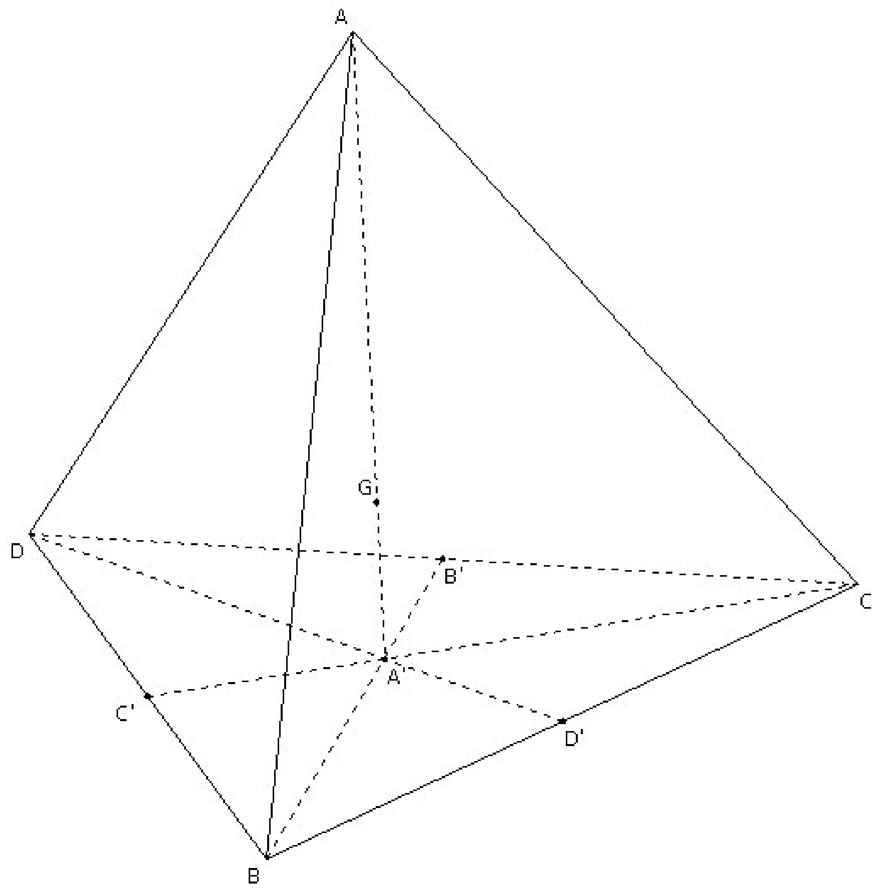
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{a^2}{2}$$

et qu'il en est de même pour les autres sommets.

2) Démontrer que deux arêtes opposées sont orthogonales.

3) Soit A' le centre de gravité du triangle BCD. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AA'}$.

Figure Geospace



Exercice 6

$ABCDEFGH$ est un cube de côté égal à 1. On considère le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

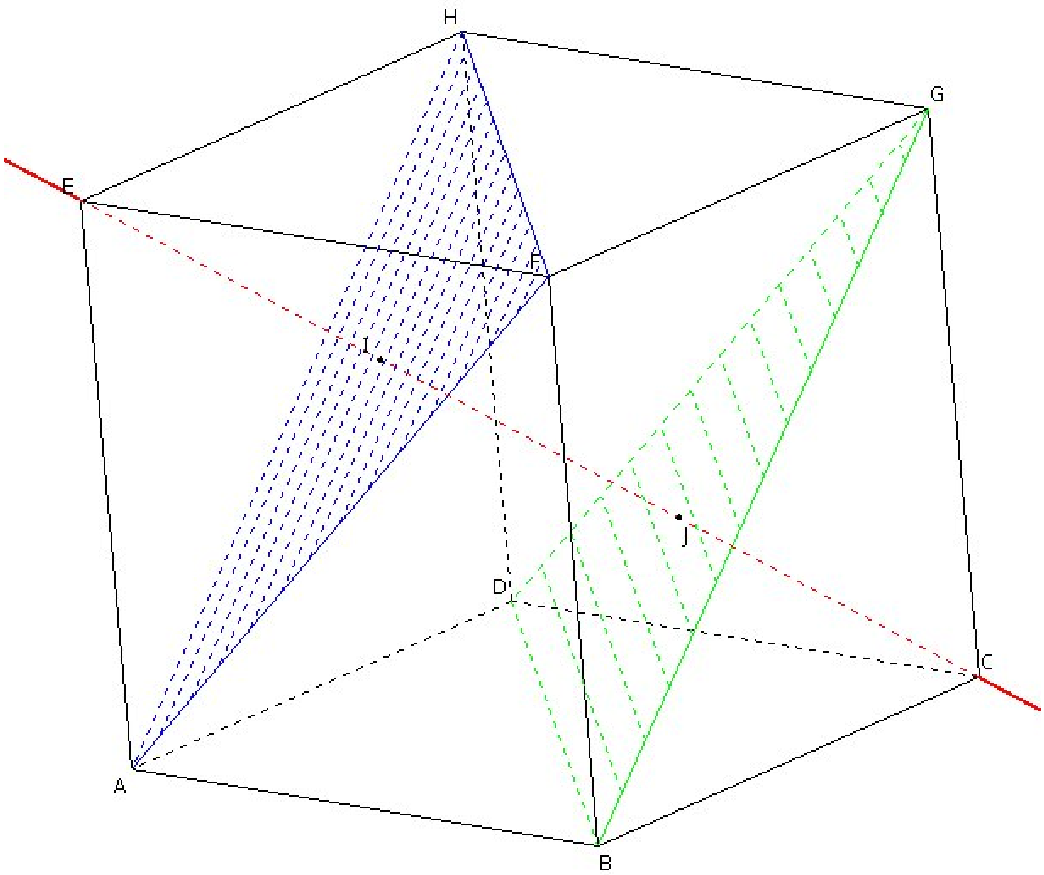
1) Calculer la longueur CE.

2) Calculer les coordonnées du centre de gravité I de AHF et du centre de gravité J de BDG.

3) Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (AHF) ainsi qu'au plan (BDG).
Rappel : pour montrer qu'une droite (d) est orthogonale à un plan P, on montre qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

4) Démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{EC}$.

Figure Geospace



Exercice 7

$ABCD$ est un tétraèdre. On note I et J les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BD]$.
On définit les points P, Q, R et S par :
$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$;

$\overrightarrow{CR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{CS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.

Le but de ce problème est de démontrer que les droites (PS), (QR) et (IJ) sont concourantes.

1) Faire une figure.

2) Démontrer que :

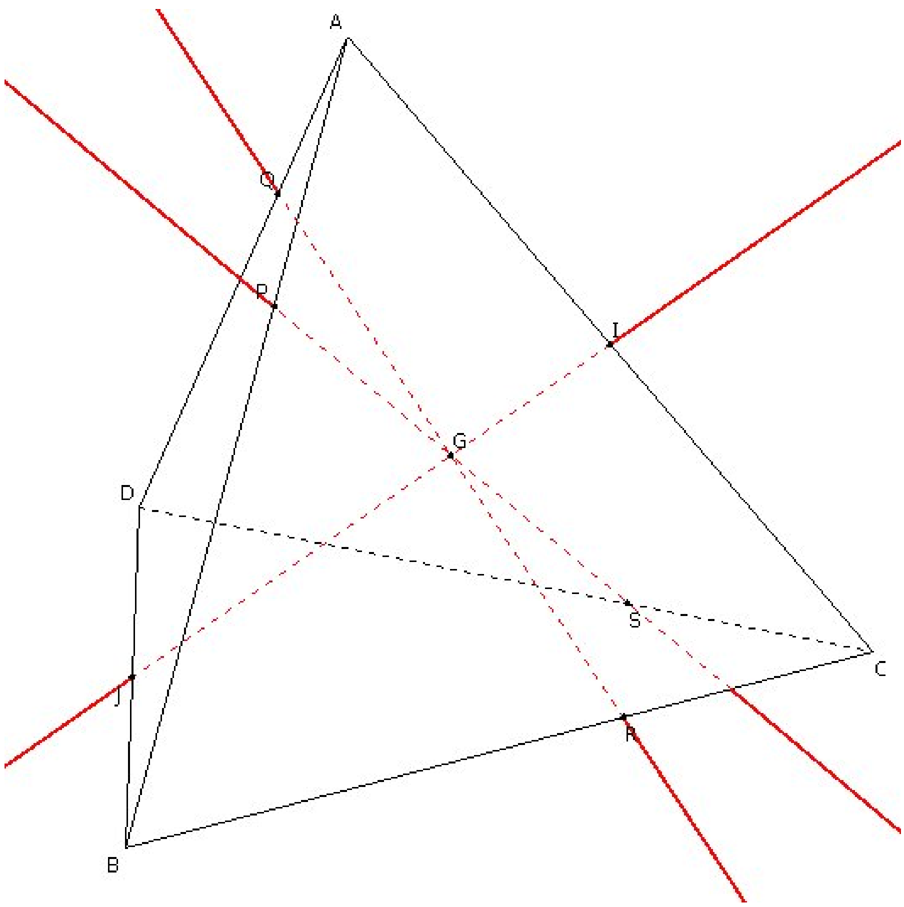
- **a)** P est le barycentre de $(A\ ;\ 2)$ et $(B\ ;\ 1)$;
- **b)** Q est le barycentre de $(A\ ;\ 2)$ et $(D\ ;\ 1)$;
- **c)** R est le barycentre de $(C\ ;\ 2)$ et $(B\ ;\ 1)$;
- **d)** S est le barycentre de $(C\ ;\ 2)$ et $(D\ ;\ 1)$.

3) On considère le point G barycentre de $(A\ ;\ 2)$, $(B\ ;\ 1)$, $(C\ ;\ 2)$ et $(D\ ;\ 1)$.
En utilisant la règle d'associativité, démontrer que G est sur (PS), mais aussi sur (QR) et sur (IJ).

4) Conclure.

Question subsidiaire : que pensez-vous du quadrilatère $PQRS$? Justifier votre réponse.

Figure Geospace



Exercice 8

$ABCDEFGH$ est un cube de côté égal à 1. On considère le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.
I est le centre du carré $EFGH$ et J le centre du carré $BCGF$.

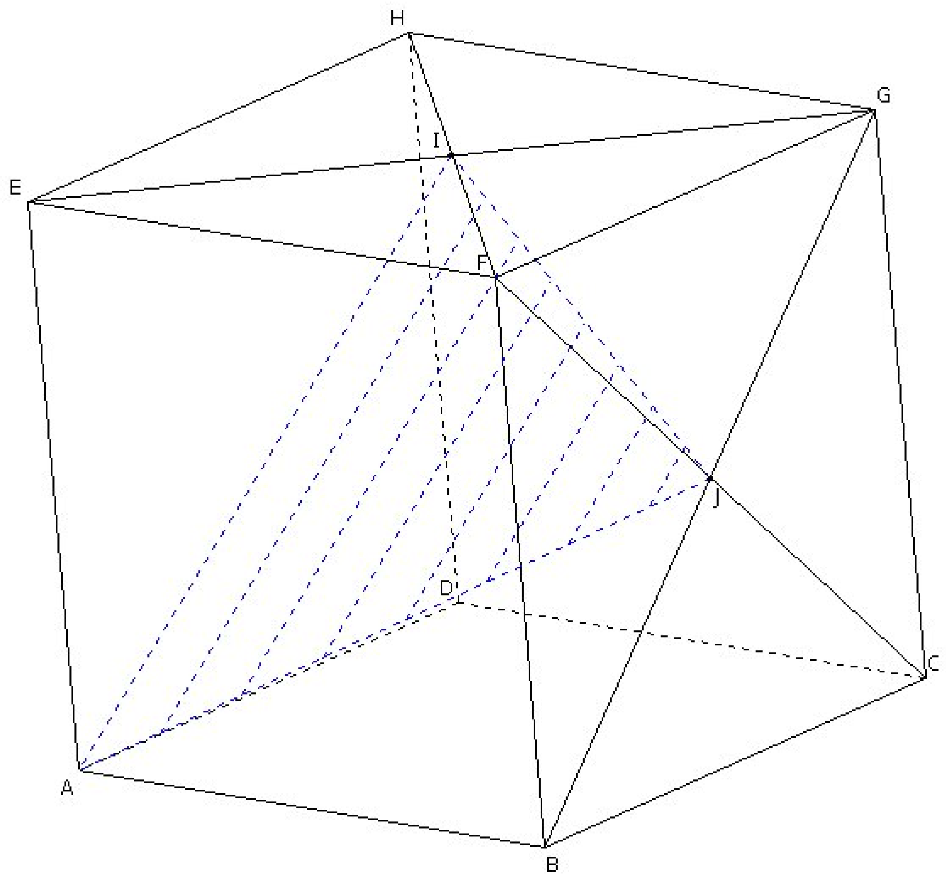
1) Faire une figure.

2) Préciser les coordonnées de I et J.

3) Calculer les distances AI, AJ et IJ.

4) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}$ et en déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ})$.

Figure Geospace

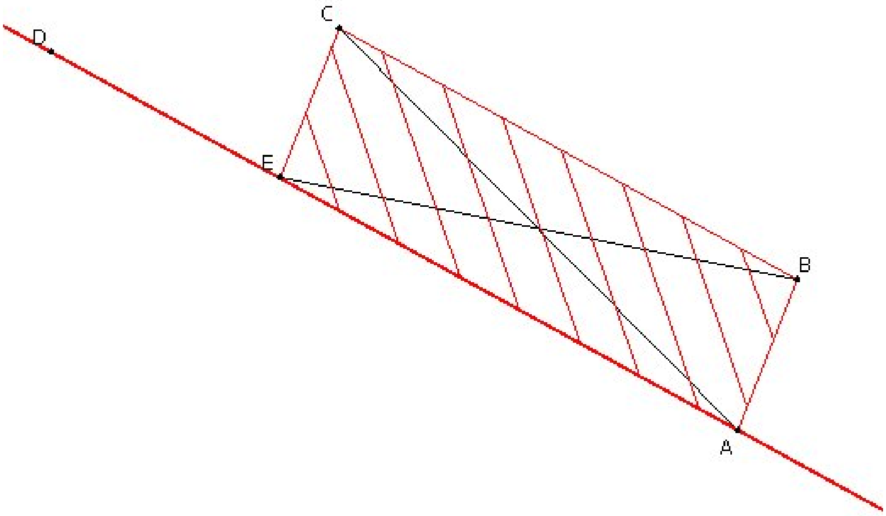


Exercice 9

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points :
$A(1\ ;\ 0\ ;\ -1)$ $B(-1\ ;\ 0\ ;\ 0)$ $C(1\ ;\ -6\ ;\ 4)$ $D(4\ ;\ -9\ ;\ 5)$ $E(3\ ;\ -6\ ;\ 3)$

1) Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.
2) Montrer que le point D appartient à la droite (AE).
3) Montrer que $ABCE$ est un parallélogramme. Est-ce un rectangle ? Est-ce un carré ?

Figure Geospace



Exercice 10

$ABCDEFGH$ est un cube et I et J sont les milieux des segments $[HE]$ et $[FB]$.
On se propose de démontrer par deux méthodes que la droite (HJ) coupe le plan (BGI) en M milieu de $[HJ]$.

Méthode analytique

1) Déterminer les coordonnées des points B, G, I, H, J et M milieu de $[HJ]$ dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

2) Démontrer que la droite (HJ) coupe le plan (BGI) en M.

Méthode géométrique

1) Démontrer que le plan (BGI) coupe le cube suivant un polygone $BGIK$ où K est le milieu de $[AE]$.

2) Quelle est la nature du quadrilatère $KJGH$?

3) Conclure.

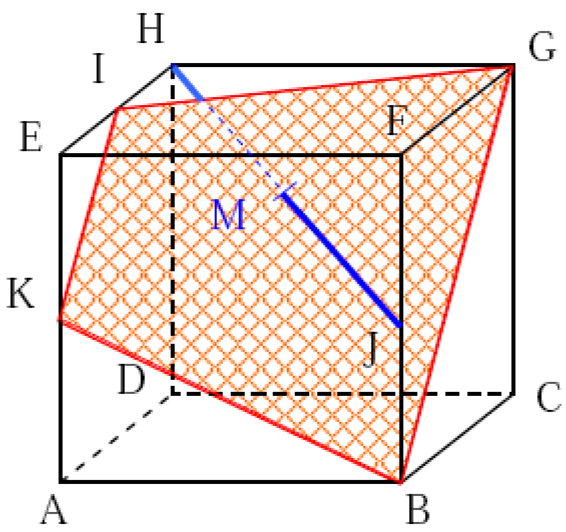
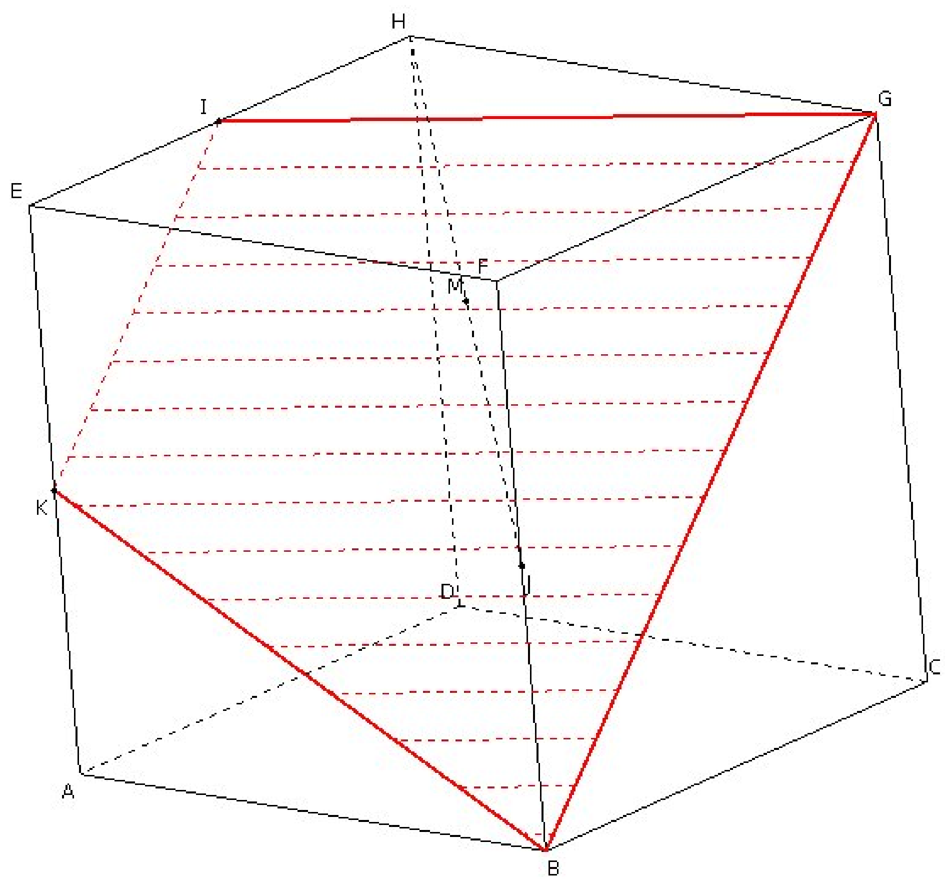
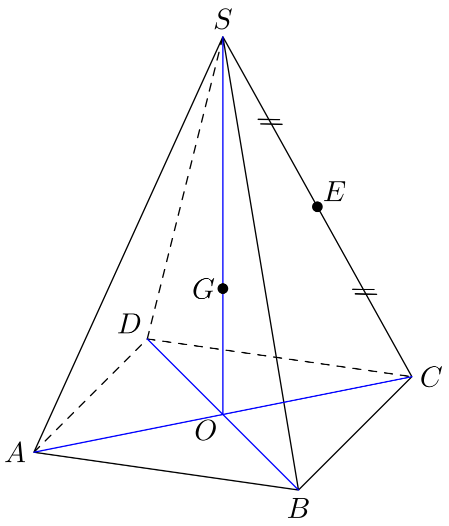


Figure Geospace

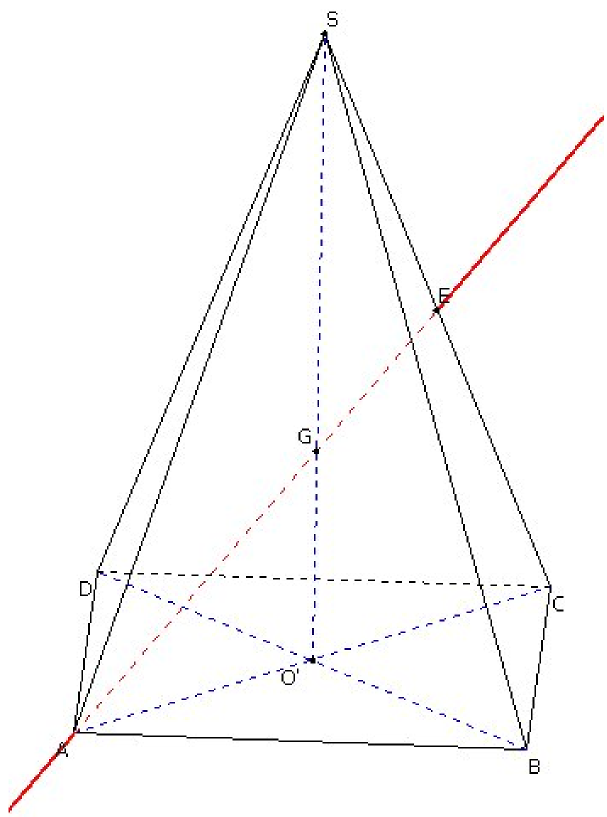


Exercice 11

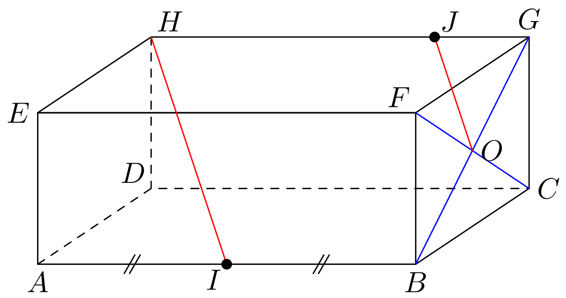


$SABCD$ est une pyramide à base carrée $ABCD$ de centre O.
G est le centre de gravité du triangle SBD et E est le milieu du segment $[SC]$.
Démontrer que les points A, G et E sont alignés.

Figure Geospace



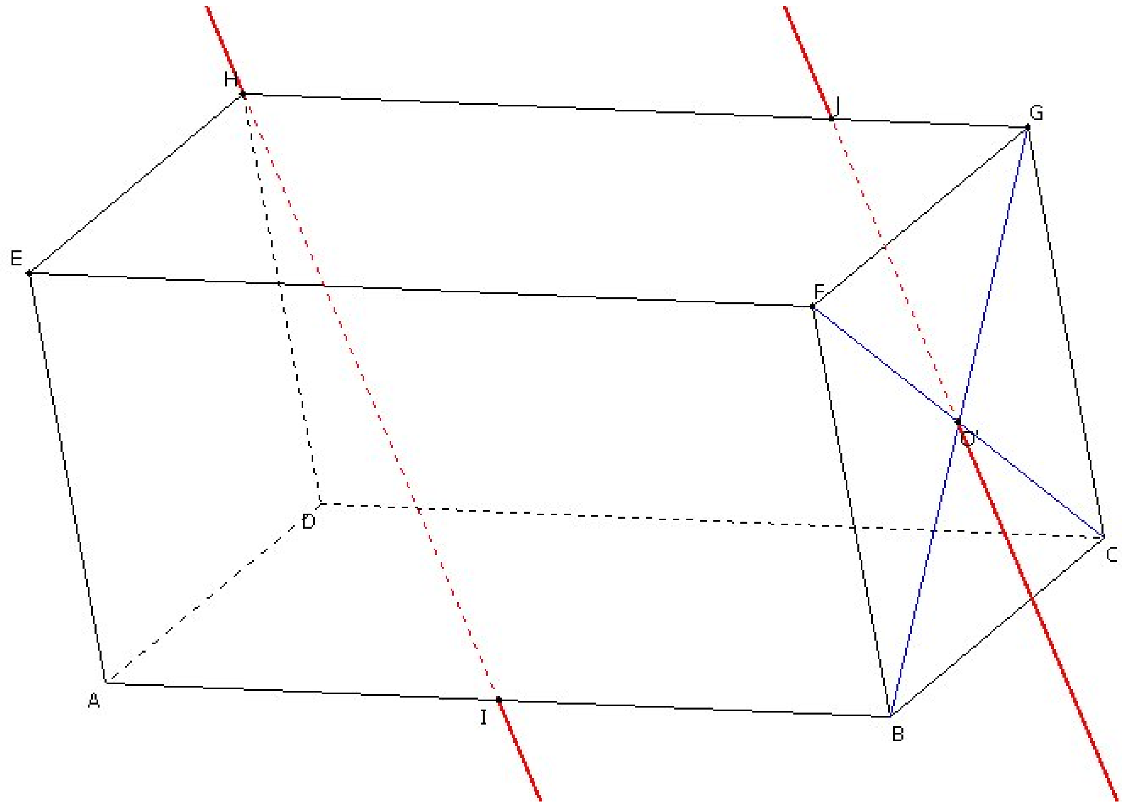
Exercice 12



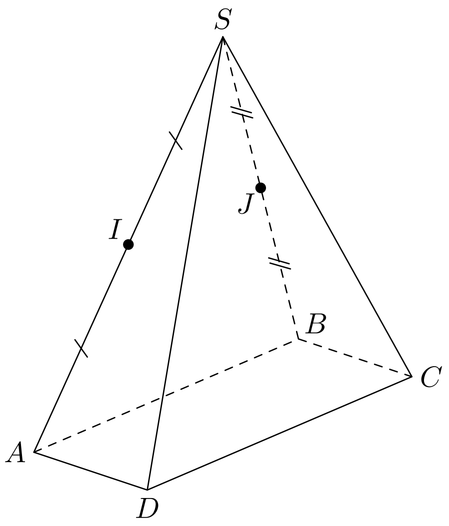
$ABCDEFGH$ est un pavé droit.
On note I le milieu de l'arête $[AB]$ et J le point tel que $\overrightarrow{HJ} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.
O est le centre de la face $BCGF$.

Démontrer que les droites (IH) et (JO) sont parallèles.

Figure Geospace



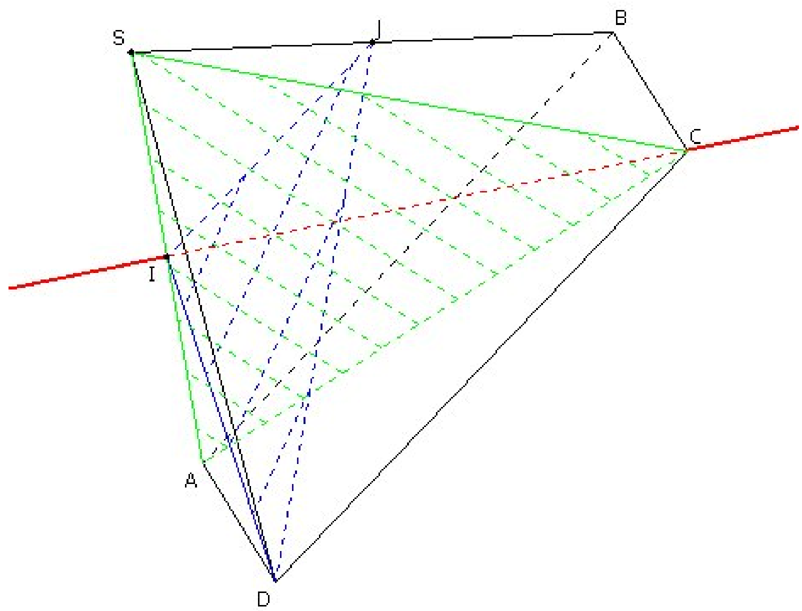
Exercice 13



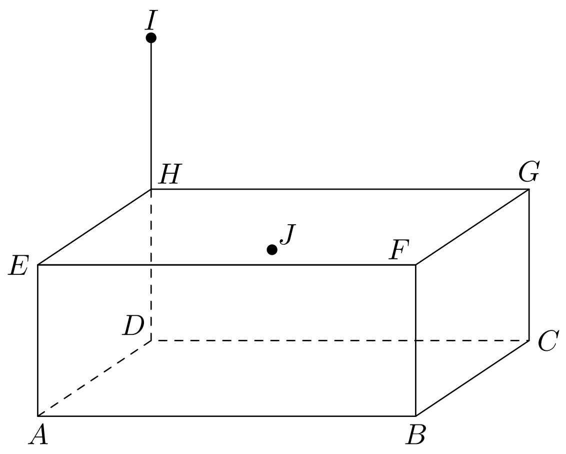
La pyramide $SABCD$ est à base rectangulaire.
On appelle I le milieu de $[SA]$ et J le milieu de $[SB]$.

Déterminer l'intersection des plans (DIJ) et (SAC).

Figure Geospace



Exercice 14



Soit un pavé $ABCDEFGH$.
On prend un point I distinct de H sur la droite (HD) et un point J sur la face $EFGH$ n'appartenant pas à $[GH]$.

Déterminer la section du pavé par le plan (IHJ).

Corrigé

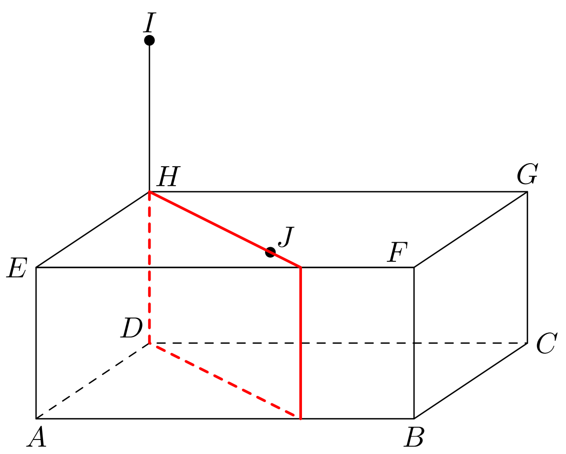
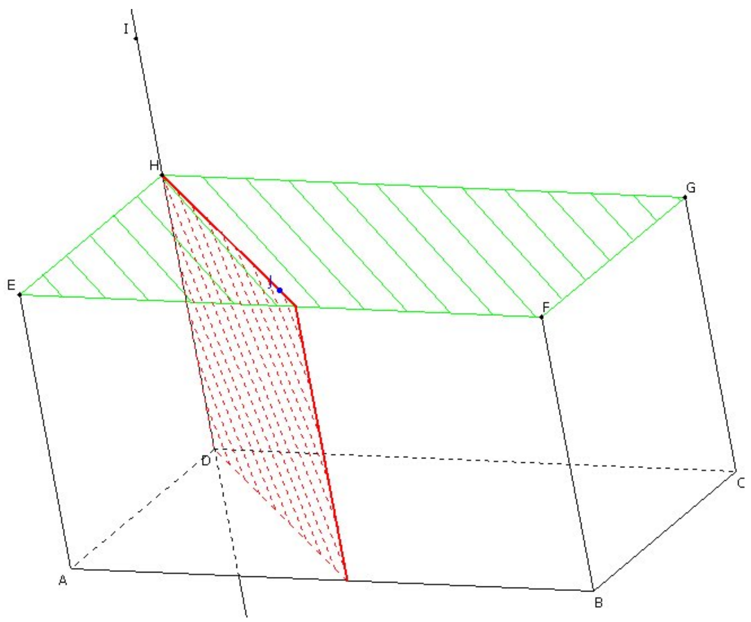
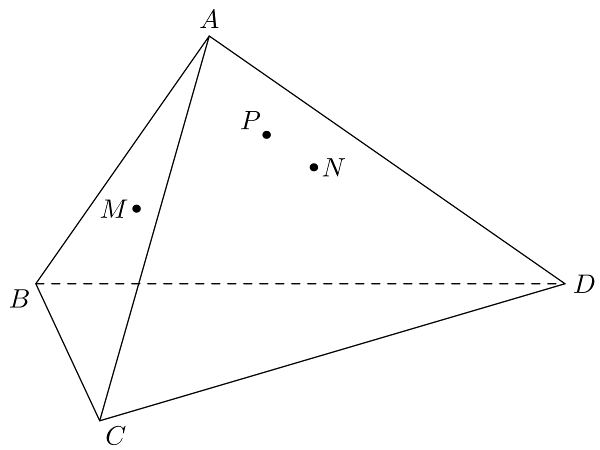


Figure Geospace



Exercice 15



Déterminer la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (MNP), sachant que :

- M est un point du plan (ABC),
- N est un point du plan (ACD),
- P est un point du plan (ABD).

Corrigé

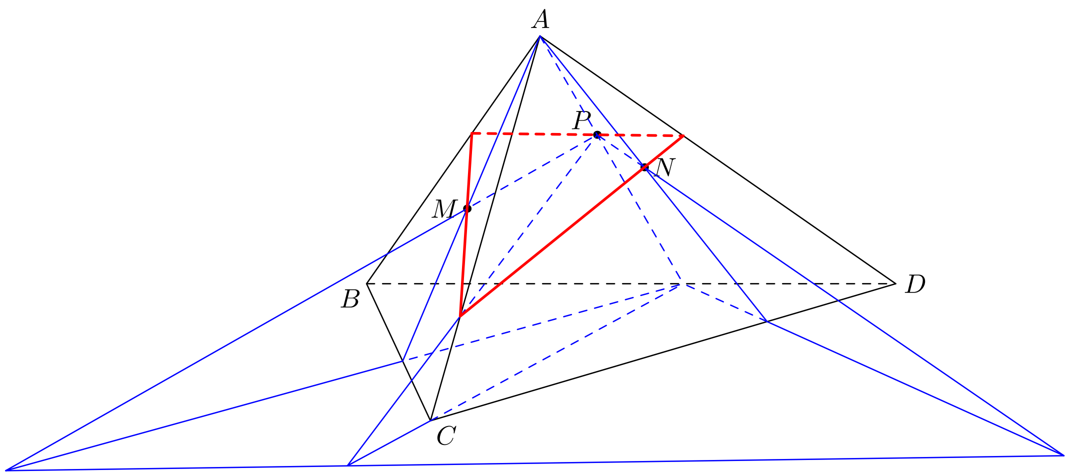
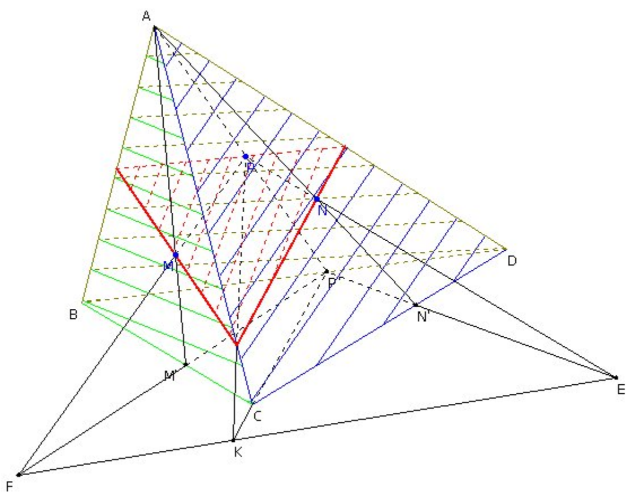
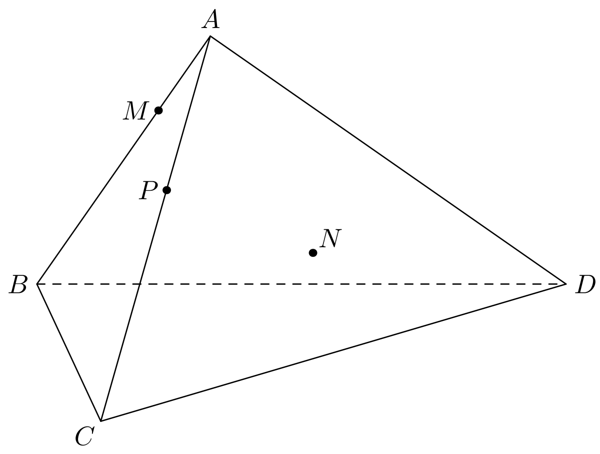


Figure Geospace



Exercice 16



Déterminer la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (MNP), sachant que :
- M est un point du segment $[AB]$,
- P est un point du segment $[AC]$,
- N est un point du plan (ACD).

Corrigé

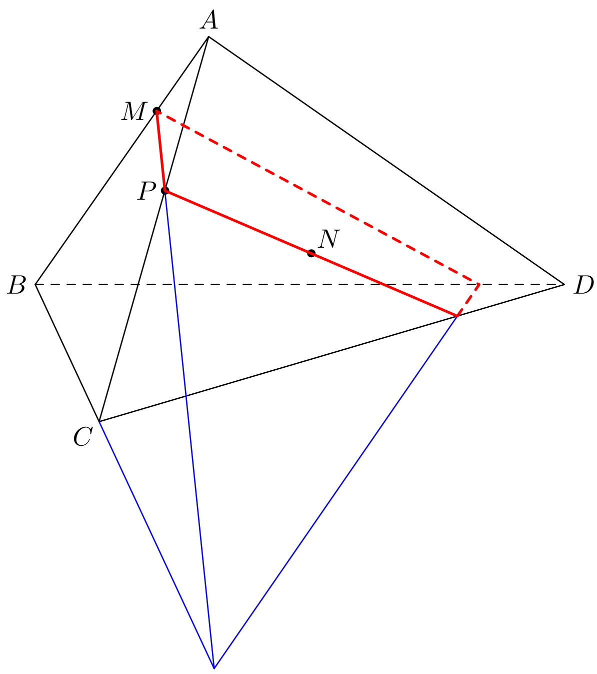
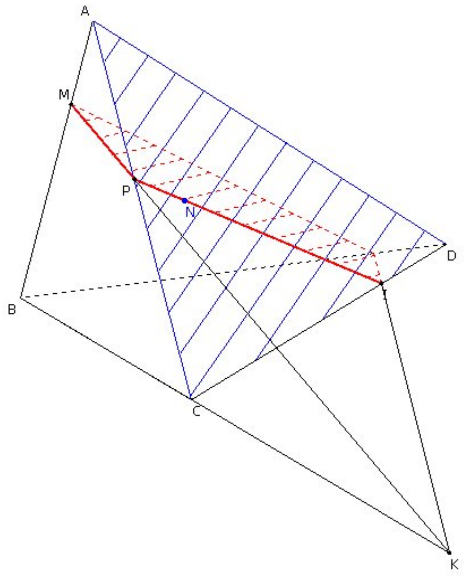
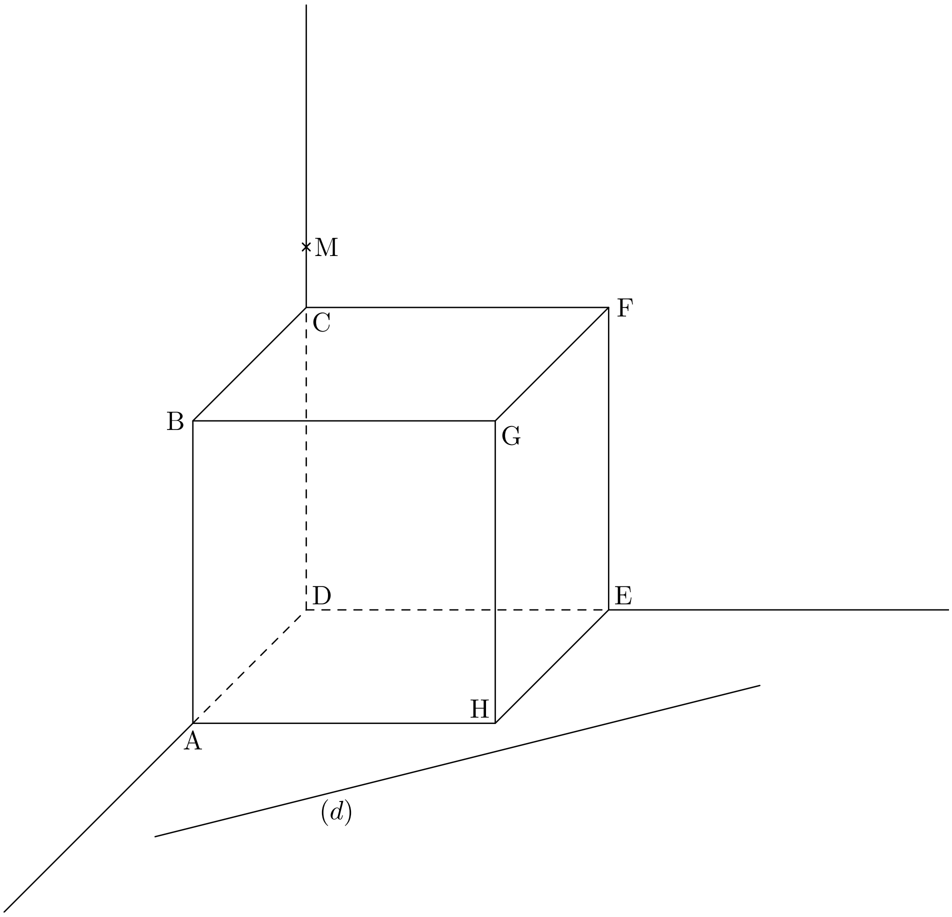


Figure Geospace



Exercice 17

$ABCDEFGH$ est un cube. La droite (d) fait partie du plan (ADE). M est un point de la droite (DC).
Dessiner la section du cube par le plan passant par la droite (d) et le point M.



Corrigé

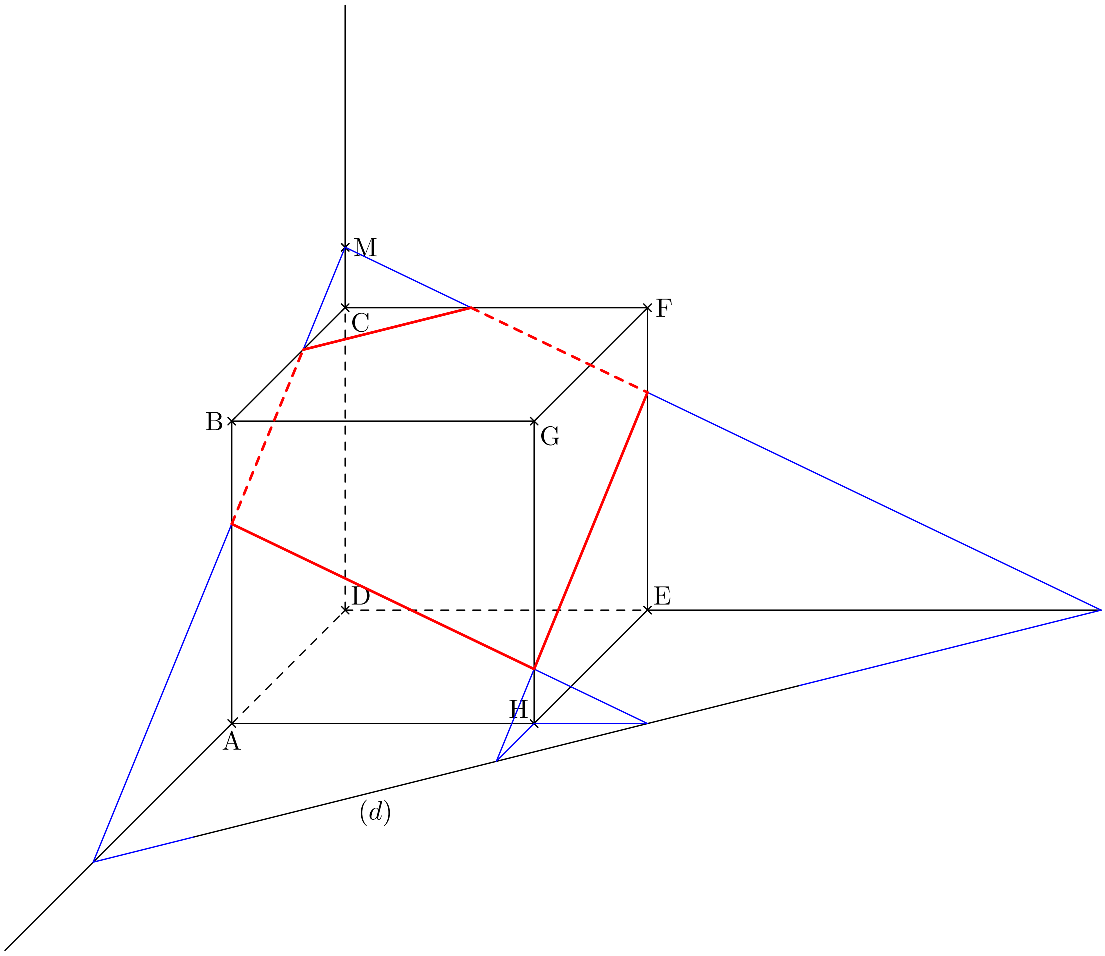
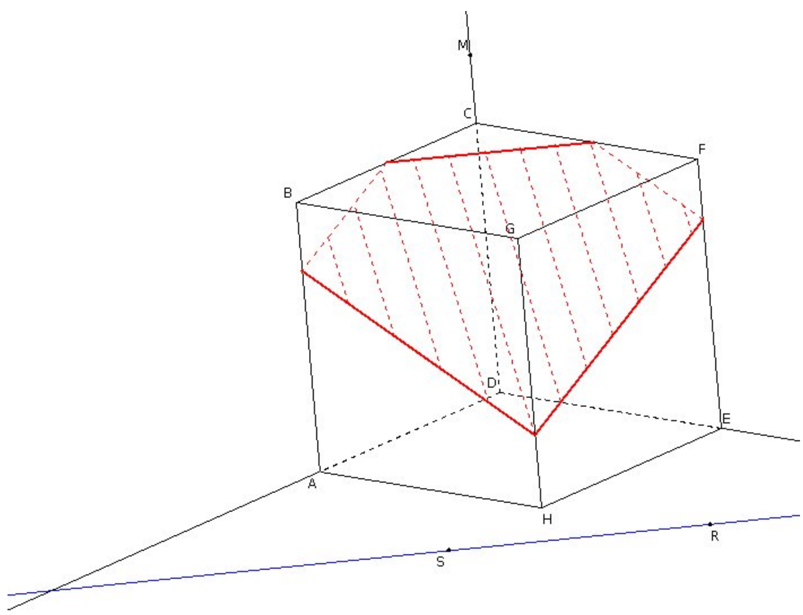
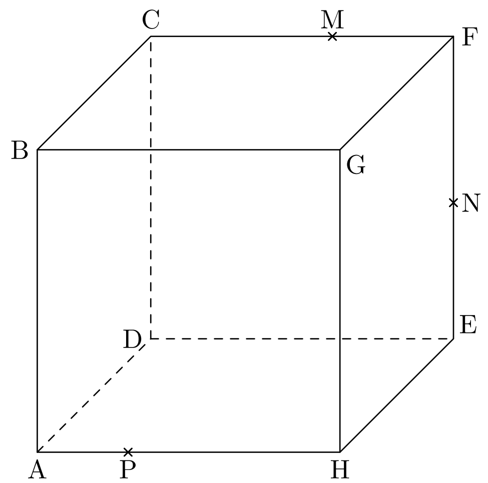


Figure Geospace



Exercice 18

$ABCDEFGH$ est un cube. M est un point du segment $[CF]$. N est un point du segment $[EF]$. P est un point du segment $[AH]$.
Dessiner la section du cube par le plan (MNP).



Corrigé

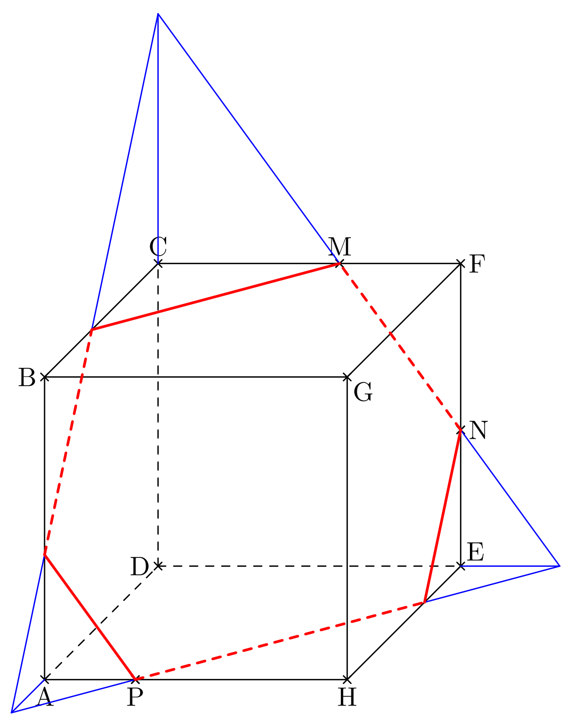
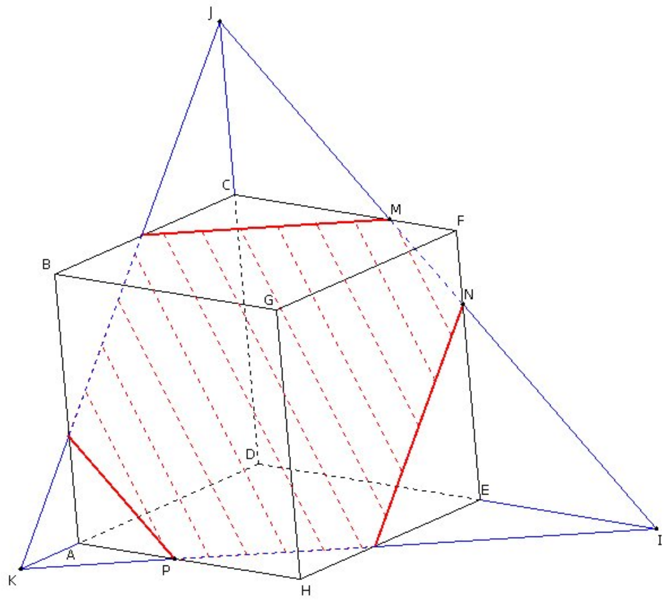
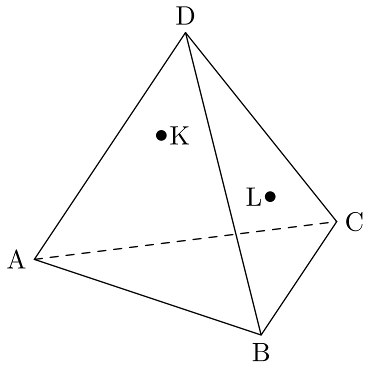


Figure Geospace



Exercice 19



On considère un tétraèdre $ABCD$.
K est un point du plan (ABD).
L est un point du plan (DBC).
On suppose (IJ) et (KL) non parallèles.
Quel est le point d'intersection du plan (ABC) avec la droite (KL) ?

Corrigé

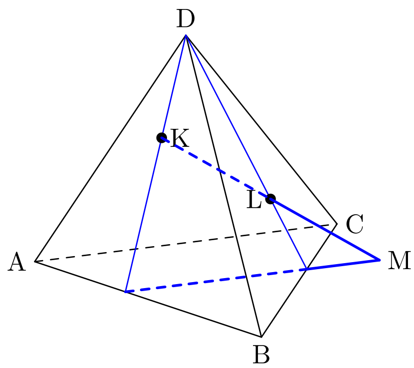
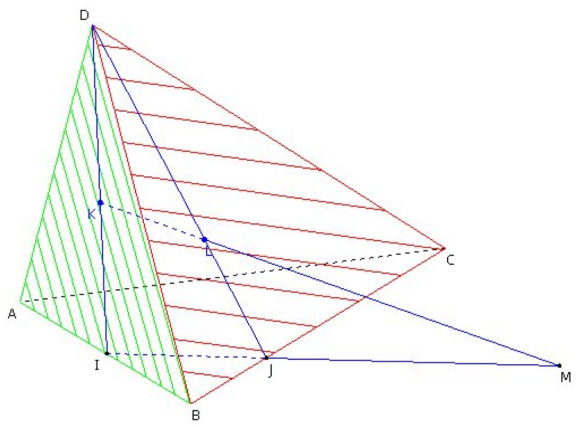


Figure Geospace

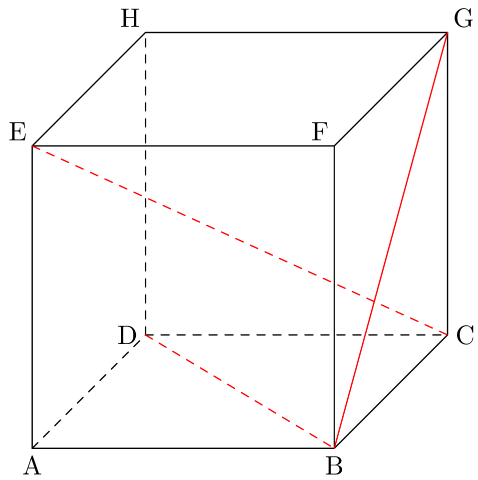


Exercice 20

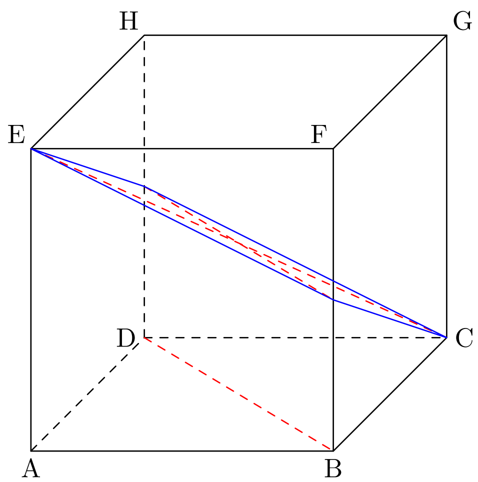
$ABCDEFGH$ est un cube.

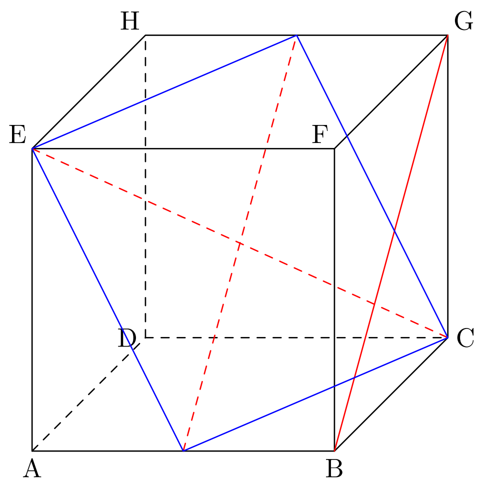
1) Les droites (EC) et (BD) sont-elles orthogonales ?

2) Les droites (EC) et (BG) sont-elles orthogonales ?



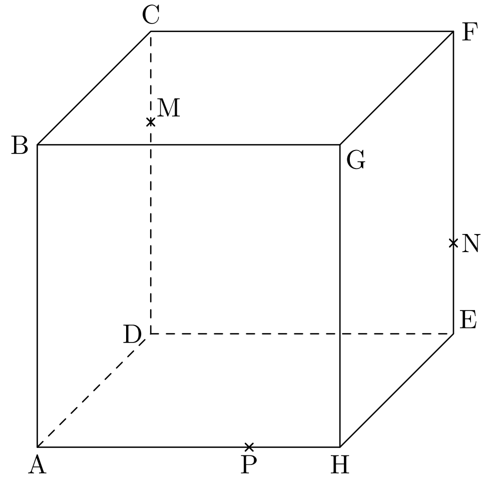
Corrigé





Exercice 21

$ABCDEFGH$ est un cube. M est un point du segment $[CD]$. N est un point du segment $[EF]$. P est un point du segment $[AH]$.
Dessiner la section du cube par le plan (MNP).



Corrigé

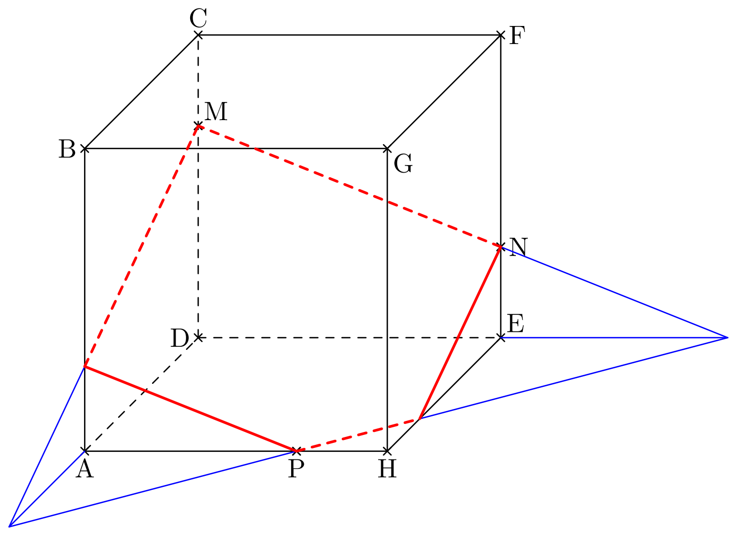
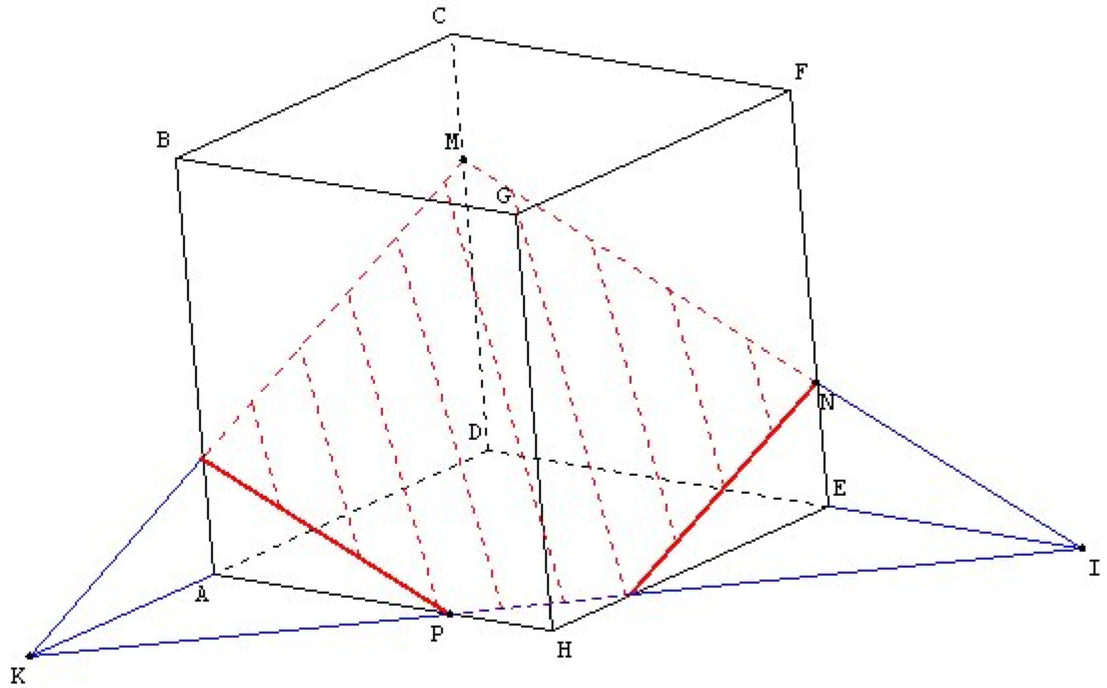
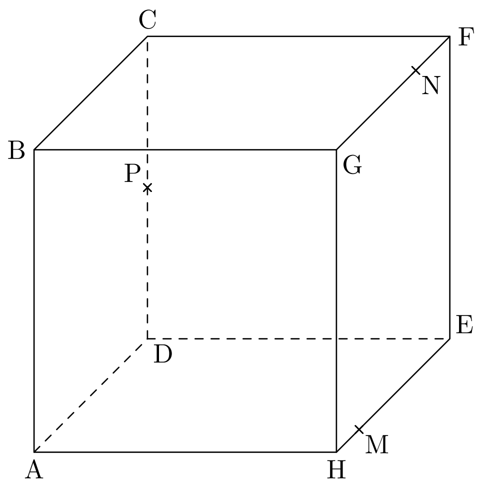


Figure Geospace



Exercice 22

$ABCDEFGH$ est un cube. M est un point du segment $[HE]$. N est un point du segment $[GF]$. P est un point du segment $[CD]$.
Dessiner la section du cube par le plan (MNP).



Corrigé

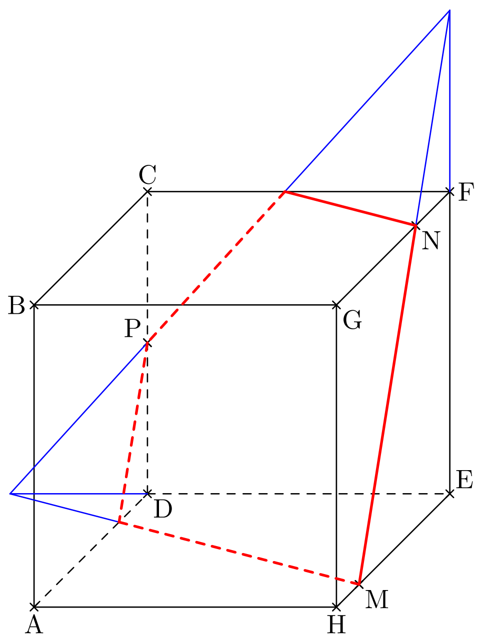
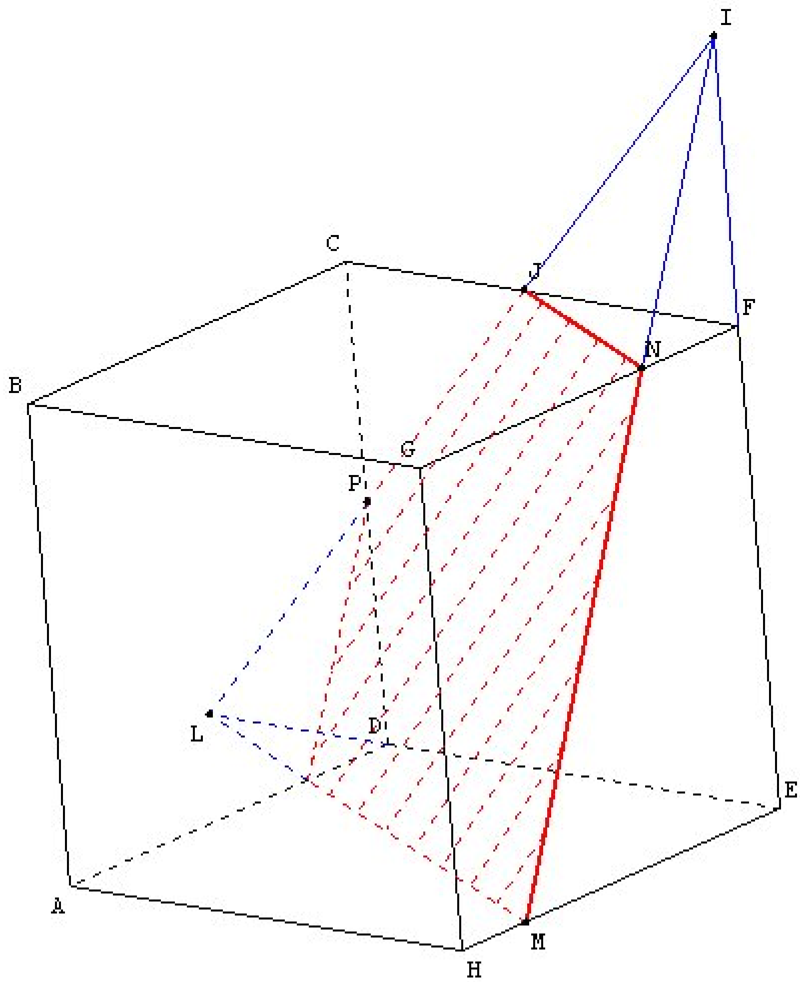


Figure Geospace



Exercice 23

Les points $A(3\ ;\ 1\ ;\ -2)$, $B(2\ ;\ 3\ ;\ 2)$, $C(4\ ;\ -2\ ;\ 0)$ et $D(3\ ;\ 0\ 4)$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 24

1) Démontrer que l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ est une sphère dont on donnera les éléments caractéristiques.

2) Le point $H\left(1+\sqrt{2}\ ;\ 0\ ;\ \sqrt{3}\right)$ est-il sur cette sphère ?

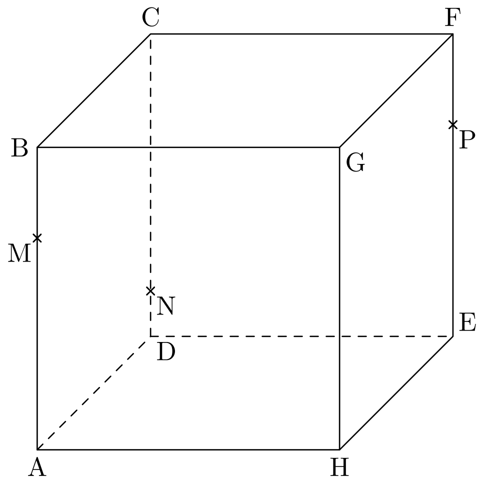
Exercice 25

On donne $E(5\ ;\ 2\ ;\ 3)$ et $F(1\ ;\ 2\ ;\ 1)$.

Déterminer les coordonnées du point G intersection de la droite (EF) avec le plan (yOz).

Exercice 26

$ABCDEFGH$ est un cube. M est un point du segment $[AB]$. N est un point du segment $[CD]$. P est un point du segment $[EF]$.
Dessiner la section du cube par le plan (MNP).



Exercice 27

Les points $A(5\ ;\ 2\ ;\ 2)$, $B(6\ ;\ 7\ ;\ 4)$, $C(2\ ;\ 5\ ;\ 3)$ et $D(0\ ;\ -5\ ;\ -1)$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 28

1) Démontrer que l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation $x^2+y^2+z^2+6y-2z=0$ est une sphère dont on donnera les éléments caractéristiques.

2) Le point $H\left(2\sqrt{2}\ ;\ -3\ ;\ 1+\sqrt{2}\right)$ est-il sur cette sphère ?

Exercice 29

On donne $E(3\ ;\ 1\ ;\ 4)$ et $F(5\ ;\ 6\ ;\ 2)$.

Déterminer les coordonnées du point G intersection de la droite (EF) avec le plan (xOz).

Exercice 30

Exercice 31

Exercice 32

Exercice 33

Exercice 34

Exercice 35

Exercice 36

Exercice 37

Exercice 38

Exercice 39

Exercice 40

Exercice 41

Exercice 42

Exercice 43

Exercice 44

Exercice 45

Exercice 46

Exercice 47

Exercice 48

Exercice 49

Exercice 50