Exercices d'arithmétique

EXERCICE 1

Déterminer tous les couples $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels qui vérifient $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5440 \\ \text{PGCD}(x\,;\,y) = 8 \end{cases}$

EXERCICE 2

1. Factoriser $A(x) = 10x^3 + 30x^2 + 20x$ et $B(x) = 6x^2 + 18x + 12$.
2. Pour cette question x est un entier naturel non nul. Déterminer le PGCD noté D des entiers naturels (non nuls) $A(x)$ et $B(x)$ selon les valeurs de x.

EXERCICE 3 – codage affine

On affecte à chaque lettre de l'alphabet un entier naturel compris entre 0 et 25 (on affecte 0 à A, 1 à B, … 25 à Z) et on pose $\mathscr{E} = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,\ldots\,;\,25\}$.
On définit un système de codage à l'aide de la transformation f qui à tout $x \in \mathscr{E}$ fait correspondre $y \in \mathscr{E}$ qui est le reste de la division euclidienne de $3x + 1$ par 26.

1. Coder le mot BAC.
2. Montrer que l'équation $3x \equiv 1 \pmod{26}$ a une seule solution dans $\mathscr{E}$.
3. En déduire que tout nombre y de $\mathscr{E}$ est l'image par f d'un seul nombre x de $\mathscr{E}$.
4. Décoder le mot EANMNG.

EXERCICE 4

n étant un entier naturel, on pose $a = 2^{n+2} - 2^n$, $b = 3^{n+2} - 3^n$ et $d = \text{PGCD}(a\,;\,b)$.

1. Construire un tableau (avec la calculatrice ou un tableur) donnant les valeurs de a, b, d pour $n \in \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,\cdots\}$.
   Quelle conjecture peut-on faire sur d ?
2. Simplifier a et b et démontrer la conjecture de la question précédente.

EXERCICE 5

1. Soit a un nombre entier.
   Montrer que les nombres $A = 13a + 3$ et $B = 15a + 2$ ont un PGCD égal à 1 ou 19.
2. Comment faut-il choisir a pour que ce PGCD soit égal à 19 ?

EXERCICE 6

1. Déterminer, selon les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division de 4^n par 7.
2. Déterminer, selon les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division de 5^n par 7.
3. Comment faut-il choisir l'entier naturel n pour que $5^n - 4^n$ soit divisible par 7 ?

EXERCICE 7

1. En utilisant les congruences modulo 7, déterminer l'ensemble E_1 des entiers relatifs x tels que le nombre $n = x^2 + x - 2$ soit divisible par 7 (*on pourra présenter les calculs dans un tableau*).
2. Déterminer l'ensemble E_2 des entiers relatifs x tels que le nombre $n = x^2 + x - 2$ soit divisible par 3.
3. k désignant un entier relatif, vérifier que si $x = 1 + 21k$ ou $x = -2 + 21k$ alors $n = x^2 + x - 2$ est divisible par 42.

EXERCICE 8

On pose pour tout entier naturel n, $u_n = 4^n + 6n - 1$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et vérifier que ce sont des multiples de 9.
2. Démontrer que, quel que soit l'entier naturel n, $u_{n+1} = 4u_n - 18n + 9$.
3. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 9.
4. Retrouver directement ce résultat en utilisant les congruences modulo 9, pour cela on pourra calculer 4^3.