Terminales S (enseignement de spécialité)
Devoir à la maison n° 2
À rendre mardi 12 novembre 2013

Un processus évolutif : le modèle proie-prédateur

On cherche à modéliser l'évolution au cours du temps de deux populations d'animaux : le renard et le campagnol (qui constitue l'essentiel du régime alimentaire du renard).
Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note a_n la population de renards, et b_n la population des campagnols (donnée en milliers). On suppose que, pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}4b_n \\ b_{n+1} = -0{,}025a_n + 1{,}05b_n. \end{cases}$$

1. Donner une interprétation des coefficients 0,8 et 1,05 dans le contexte de l'exercice.
2. On suppose que la population initiale de chaque espèce est : 90 renards et 30 000 campagnols, soit $a_0 = 90$ et $b_0 = 30$.
   Calculer, à l'aide de votre calculatrice ou d'un tableur, les 100 premiers termes des suites (a_n) et (b_n). Que constate-t-on ?
3. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
   a. Écrire le système linéaire sous forme matricielle : $X_{n+1} = AX_n$ où A est une matrice carrée d'ordre 2 que l'on précisera.
   b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.
   c. À l'aide de la calculatrice calculer A^{20}, A^{50}, A^{100}. Que constate-t-on ?
4. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   a. Justifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
   b. Par le calcul, démontrer que $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.
   c. Démontrer que $A = PDP^{-1}$.
   d. On rappelle que, pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$ (*la démonstration de cette propriété a été faite en cours et pourrait être l'objet d'une restitution organisée de connaissances*).
   Calculer A^n en fonction de n et en déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n (on rappelle que $a_0 = 90$ et $b_0 = 30$).
   e. Déterminer les limites des suites (a_n) et (b_n) et comparer avec les résultats obtenus à la question 2.
5. a. Que se passe-t-il si les valeurs initiales changent pour $a_0 = 90$ et $b_0 = 60$?
   b. À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, voir ce qui se passe pour les puissances de la matrice A et pour les deux suites lorsque $a_0 = 90$, $b_0 = 30$ et que l'on remplace le coefficient $-0{,}025$ par une autre valeur très proche ($-0{,}02$ ou $-0{,}03$ par exemple).