Contents

Terminale S Exercices du livre- Chapitre 11
Produit scalaire dans l'espace

Exercices d'entraînement

1. Produit scalaire dans le plan

Exercice 1 page 339

Soit Un carré ABCD de côté a et de centre O.
I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].
Exprimer en fonction de a:

1. $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}$;
   $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BJ}$;
   $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{AJ}$.
2. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$;
   $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$;
   $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.
3. $\overrightarrow{OJ}.\overrightarrow{OA}$;
   $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BI}$;
   $\overrightarrow{KB}.\overrightarrow{KD}$.

Exercice 2 page 339

Soit Un carré ABCD de côté a.
On place les ponts E et F tels que :

$\overrightarrow{BE} = t\overrightarrow{BC}$;
$\overrightarrow{CF} = t\overrightarrow{CD}$;

1. Faire une figure et émettre une conjecture sur les droites (AE) et (BF).
2. Démontrer cette conjecture :
   (a) en se plaçant dans un repère orthonormal ;
   (b) sans repère à l'aide d'une rotation.

Exercice 5 page 339

Soit deux points A et B et I le milieu de [AB].

1. (a) Démontrer que :
   $$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2.$$
   (b) En déduire l'ensemble Γ des points M du plan tels que
   $$MA^2 + MB^2 = AB^2.$$
2. Dans cette question, on prend A(1;2) et B(3;5).
   Retrouver analythiquement le résultat obtenu à la question 1.b.

2. Produit scalaire dans l'espace

Exercice 7 page 339

Dans chacun des cas suivants, déterminer deux réels x et y pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

a. $\vec{u}\,(x\ ;\ 1\ ;\ -5)$, $\vec{v}\,(2\ ;\ 0\ ;\ 2)$;

b. $\vec{u}\,(x\ ;\ 1\ ;\ -5)$, $\vec{v}\,(2\ ;\ x\ ;\ 7)$;

c. $\vec{u}\,(2\ ;\ x\ ;\ -3)$, $\vec{v}\,(y\ ;\ -2\ ;\ 4)$;

d. $\vec{u}\,(-3\ ;\ 1\ ;\ x)$, $\vec{v}\,(2\ ;\ -5\ ;\ y)$.

Exercice 8 page 339

Soit les vecteurs $\vec{u}\,(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ et $\vec{v}\,(4\ ;\ -2\ ;\ 0)$.

1. (a) Vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
   (b) Déterminer $\vec{e_1}$ de norme 1 colinéaire à $\vec{u}$.
   (c) Déterminer $\vec{e_2}$ de norme 1 colinéaire à $\vec{v}$.

2. (a) Soit le vecteur $\overrightarrow{w}\ (x\ ;\ y\ ;\ z)$, donner le système de deux équations à trois inconnues vérifié pas x, y et z pour que $\overrightarrow{w}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Résoudre ce système.

(b) Soit O un point quelconque de l'espace, déterminer $\overrightarrow{e_3}$ tel que $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3}\right)$ soit un repère orthonormal de l'espace (*deux solutions*).

Exercice 11 page 339

Soit les points A $(0\ ;\ 3\ ;\ 4)$; B $(1\ ;\ -1\ ;\ -1)$ et C $(2\ ;\ 0\ ;\ 2)$.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et en déduire $\cos\left(\widehat{\mathrm{ABC}}\right)$.

2. Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC, calculer AH et en déduire l'aire du triangle ABC en unités d'aire.

3. Sans repère

Exercice 24 page 341

Soit OAB un triangle rectangle en O, soit (Δ) la perpendiculaire en O au plan (OAB) et soit C un point de (Δ) distinct de O.

1. Calculer les produits scalaires : $\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}}$.

2. Soit H le projeté orthogonal de O sur [AB], montrer que (CH) est orthogonale à (AB).

4. Equation de plan, vecteur normal

Exercice 32 page 341

Pour chacun des plans suivants définis par une équation cartesienne, donner un vecteur normal.

a. (P) : $2x - 6y + 2z - 7 = 0$;

b. (Q) : $z - x = 0$;

c. (R) : $x + 2y - 7 = 5 - 3z$.

Exercice 33 page 341

Donner une équation cartesienne du plan (P) passant par le point A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ dans chacun des cas suivants :

a. A $(2\ ;\ -3\ ;\ 1)$, $\overrightarrow{n}\ (1\ ;\ 3\ ;\ -4)$;

b. A $(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$, $\overrightarrow{n}\ \left(\dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{1}{5}\ ;\ \dfrac{1}{3}\right)$;

c. A $\left(\sqrt{2}\ ;\ 0\ ;\ \sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{n}\ \left(0\ ;\ 1\ ;\ \sqrt{3}\right)$.

Exercice 36 page 341

Dans chacun des cas suivants, déterminer un vecteur normal au plan ABC puis une équation cartesienne de ce plan.

a. A $(2\ ;\ 0\ ;\ -1)$, B $(0\ ;\ 3\ ;\ 4)$, C $(1\ ;\ 5\ ;\ 0)$;

b. A $\left(1\ ;\ 1\ ;\ \sqrt{2}\right)$, B $(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$, C $\left(\sqrt{2}\ ;\ 1\ ;\ 1\right)$.

Exercice 37 page 341

Soit le plan (P) d'équation $5x - 2y = 7$. Dans chacun des cas suivants, donner un système d'équations paramétriques de (d) passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et déterminer l'intersection de (d) et de (P).

a. A $(1\ ;\ -3\ ;\ 5)$ et $\overrightarrow{u}\ (1\ ;\ 1\ ;\ 1)$;

b. A $(2\ ;\ 1\ ;\ -3)$ et $\overrightarrow{u}\ (2\ ;\ 5\ ;\ 1)$;

c. A $(0\ ;\ 1\ ;\ 2)$ et $\overrightarrow{u}\ (0\ ;\ 0\ ;\ 5)$.

Exercice 38 page 341

Soit A $(-1\ ;\ 4\ ;\ 7)$, déterminer l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}} = -2$.
Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (E) et (OA).

5. Distance d'un point à un plan

Exercice 41 page 342

Soit A $(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.
De quel plan (P), (Q), (R) A est-il le plus proche ?

a. (P) : $3x - 2y + 7 = 0$,

b. (P) : $x + 2y - 3z - 10 = 0$,

c. (P) : $4y + 3z - 5 = 0$?

6. Intersection de plans, systèmes

Exercice 50 page 343

Soient les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x - 3y + 2z = 5$ et $2x + y + 7z = 1$, donner un système d'équations paramétriques de leur droite d'intersection.

Exercice 55 page 343

L'espace est muni d'un repère orthonormal. Soit les plans :

- (P) : $x + y - z = 1$;
- (Q_m) : $mx + 2y - 2z = 2$;
- (R_m) : $(3 - m)x + y + (m + 2)z = -5$ $(m \in \mathbb{R})$.

1. Déterminer la position relative de ces trois plans quand $m = 2$.

2. Déterminer la position relative de ces trois plans quand $m \neq 2$.

Exercices d'approfondissement

7. Equations de plans, systèmes

Exercice 82 page 346

L'espace est muni d'un repère orthonormal. Soit les droites (d) passant par A $(5\ ;\ 0\ ;\ 5)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\ (1\ ;\ 1\ ;\ 0)$; (δ) passant par B $(4\ ;\ 4\ ;\ 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\ (0\ ;\ 1\ ;\ 2)$.

1. Vérifier que (d) et (δ) ne sont pas coplanaires. On cherche une équation cartésienne du plan (P) contenant (d) et parallèle à (δ).
2. (a) Soit C le point tel que $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{u}$, montrer que C est dans (P).

   (b) Soit D le point tel que $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{v}$, montrer que D est dans (P).
3. Déduire de ce qui précéde une équation cartésienne de (P).

8. Problèmes

Exercice 93 page 349

On se propose d'étudier une modélisation d'une tour de contrôle de trafic aérien, chargée de surveiller deux routes aeriennes représentées par deux droites de l'espace.
L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k}\right)$ d'unité 1 km. Le plan $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\right)$ représente le sol.
Les deux routes aériennes à contrôler sont représentées par deux droites (D_1) et (D_2), dont on connait des représentations paramétriques :

$$(\mathrm{D}_1) : \begin{cases} x &= 3+a \\ y &= 9+3a \\ z &= 2 \end{cases},\ a \in \mathbb{R}\ ; \quad \text{et}$$

$$(\mathrm{D}_2) : \begin{cases} x &= 0,5+2b \\ y &= 4+b \\ z &= 4-b \end{cases},\ b \in \mathbb{R}.$$

1. (a) Indiquer les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u_1}$ directeur de la droite (D_1) et d'un vecteur $\overrightarrow{u_2}$ directeur de la droite (D_2).

   (b) Prouver que les droites (D_1) et (D_2) ne sont pas coplanaires.
2. On veut installer au sommet S de la tour de contrôle, de coordonnées S $(3\ ;\ 4\ ;\ 0,1)$, un appareil de surveillance qui emet un rayon représenté par une droite notée (R). Soit (P_1) le plan contenant S et (D_1) et (P_2) le plan contenant S et (D_2).

   (a) Montrer que (D_2) est sécante à (P_1).

   (b) Montrer que (D_1) est sécante à (P_2).

   (c) Un technicien affirme qu'il est possible de choisir la direction de (R) pour que cette droite coupe chacune des droites (D_1) et (D_2).

   Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.