1. Probabilités conditionnelles

Exemple $_1$ *: Une enquête portant sur* 5000 *clients d'une grande surface spécialisée en informatique a montré que* 4000 *clients avaient bénéficié des conseils d'un vendeur.*
De plus 70 % *des clients qui ont bénéficié des conseils d'un vendeur ont effectué un achat alors que* 20 % *seulement des clients qui n'ont pas bénéficié des conseils d'un vendeur ont effectué un achat.*
On interroge au hasard un des clients sur lequel a porté l'enquête et on admet qu'il y a équiprobabilité.
On considère les évènements suivants :

V : "le client a bénéficié des conseils d'un vendeur";

A : "le client a effectué un achat".

1. *Représenter les données par un tableau puis par un arbre (deux possibilités !).*
2. *Calculer* $p(V)$ *et* $p(A)$.
3. *On interroge une personne ayant effectué un achat. Quelle est la probabilité qu'elle ait bénéficié des conseils d'un vendeur ?*
4. *On interroge une personne ayant bénéficié des conseils d'un vendeur. Quelle est la probabilité qu'elle ait effectué un achat ?*

Définition $_{1.1}$: On considère un ensemble Ω muni d'une loi de probabilité p. Soit A et B deux événements de Ω, B de probabilité non nulle.
On définit la **probabilité de A sachant que B est réalisé**, notée $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$ ou $p(\mathrm{A}/\mathrm{B})$, par :

$$p(\mathrm{A}/\mathrm{B}) = p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{B})}.$$

$$\text{ainsi : } \begin{aligned} p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) &= p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B}) \qquad (\text{si } p(\mathrm{B}) \neq 0) \\ &= p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \times p(\mathrm{A}) \qquad (\text{si } p(\mathrm{A}) \neq 0) \end{aligned}$$

Exemple $_2$ *: Un système d'alarme fonctionne ainsi,*

- *s'il y a danger, la probabilité que l'alarme se déclenche est* 0,99.
- *en l'absence de danger, elle se déclenche avec une probabilité de* 0,005.

La probabilité qu'il y ait un danger est 0,001.
L'alarme se déclenche. Quelle est la probabilité que ce soit une fausse alerte ?

2. Arbre pondéré

Exemple $_3$ *: On jette une pièce.*

- *Si on obtient pile, on tire une boule dans une urne contenant* 1 *boule blanche et* 2 *boules noires.*
- *Si on obtient face, on tire une boule dans une urne contenant* 3 *boules blanches et* 2 *boules noires.*

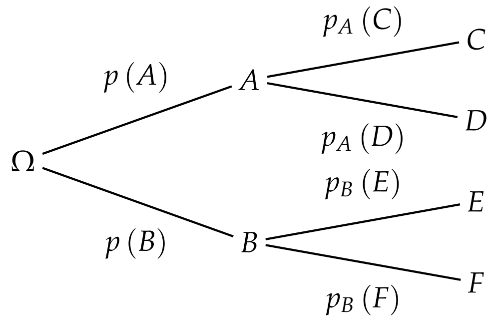
1. *Représenter cette expérience par un arbre.*
2. *Quelle est la probabilité que la boule soit noire ?*
3. *On a tiré une boule noire. Quelle est la probabilité que le jet de la pièce ait produit face ?*

Pour déterminer des probabilités, on peut être amené à construire des arbres dont les branches sont affectées de probabilité : ce sont des **arbres pondérés**.

- Un arbre pondéré se construit et se lit de gauche à droite.

- L'origine de l'arbre est la racine de l'arbre.
- Les traits partant de la racine sont appelés branches primaires de l'arbre ; elles mènent à des noeuds.
- Les branches joignant deux noeuds sont dites secondaires.
- Tout chemin menant de la racine à un noeud est appelé trajet.

Exemple $_4$ *: Cet arbre est un arbre pondéré. Sur chaque branche, on peut lire une probabilité.*



Règles de construction d'un arbre pondéré :

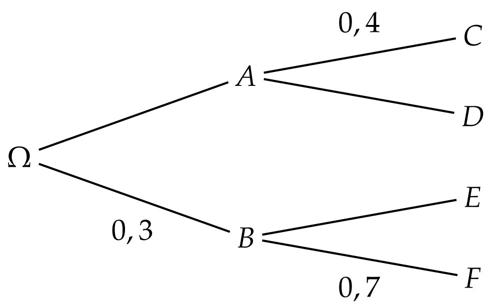
1. Les événements qui se trouvent aux extrémités des branches primaires forment une partition de l'univers Ω.
2. Le poids d'une branche primaire est la probabilité de l'événement qui se trouve à son extrémité.
3. Le poids d'une branche secondaire est la probabilité conditionnelle de l'événement qui se trouve à son extrémité sachant que le trajet menant à son origine a été réalisé.
4. Le poids ou la probabilité d'un trajet est le produit des poids des branches le constituant.
5. La probabilité d'un événement associé à plusieurs trajets complets est la somme des probabilités de ces trajets.

Remarques :

- La somme des poids des branches primaires vaut 1.
- La somme des poids des branches secondaires issues d'un même noeud vaut 1.

Exemple $_5$ *:*

Compléter l'arbre ci-dessous :



En déduire les probabilités :

- $p(A \cap C) =$
- $p(A \cap D) =$
- $p(B \cap C) =$
- $p(B \cap D) =$
- $p(C) =$
- $p(D) =$

3. Formule des probabilités totales

Théorème $_{3.1}$: Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements de probabilité non nulle réalisant une partition de l'univers Ω. Alors pour tout événement B :

$$\begin{aligned} p(B) &= p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \ldots + p(A_n \cap B) \\ &= p_{A_1}(B) \times p(A_1) + p_{A_2}(B) \times p(A_2) + \ldots + p_{A_n}(B) \times p(A_n). \end{aligned}$$

Exemple $_6$ *: On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3.*

- *U_1 contient 1 boule rouge et 5 jaunes.*
- *U_2 contient 3 boules rouges et 1 jaune.*
- *U_3 contient 1 boule rouge et 2 jaunes.*

On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans cette urne.

1. *Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?*
2. *La boule tirée est rouge. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1 ?*

4. Indépendance

Exemple $_7$ *: On choisit une carte au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.*

1. *Quelle est la probabilité que cette carte soit un roi ?*
2. *On sait que la carte tirée est un coeur. Quelle est la probabilité que cette carte soit un roi ?*
3. *On sait que la carte tirée est une figure (valet, dame, roi). Quelle est la probabilité que cette carte soit un roi ?*

Définition $_{4.1}$: On dit que deux événements sont **indépendants** si,

$$p\left(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}\right) = p\left(\mathrm{A}\right) \times p\left(\mathrm{B}\right)$$

(ce qui est équivalent à $p_{\mathrm{B}}\left(\mathrm{A}\right) = p\left(\mathrm{A}\right)$ dans le cas où $p\left(\mathrm{B}\right) \neq 0$).

Exemple $_8$ *: On extrait au hasard un jeton d'un sac contenant six jetons (trois rouges numérotés 1, 2, 3, deux jaunes numérotés 1, 2 et un bleu numéroté 1). On désigne par R, U et D les événements :*

R : "le jeton est rouge"; U : "le jeton est un un"; D : "le jeton est un deux".
Les événements R et U sont-ils indépendants ? Et les événements R et D ?

Définition $_{4.2}$: Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω.
X prend les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et Y prend les valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_m$.
On dit que ***X* et *Y* sont indépendantes** lorsque pour tout i et j $(1 < i < n$ et $1 < j < m)$, les événements $(X = x_i)$ et $\left(Y = y_j\right)$ sont indépendants c'est à dire,

$$p\left(X = x_i \text{ et } Y = y_j\right) = p\left(X = x_i\right) \times p\left(Y = y_j\right).$$

Exemple $_9$ *: On lance un dé parfaitement équilibré. On considère les variables aléatoires X et Y définies par :*

X prend la valeur 1 si le résultat est pair et -1 sinon.

Y prend la valeur 2 si le résultat est 2 ou 5 et 1 sinon.

Les variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

Propriété $_{4.1}$: Lors de la répétition d'expériences aléatoires indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est égale au produit des probabilités de chacun de ces résultats.

Exemple $_{10}$ *: On lance n fois une pièce de monnaie équilibrée.*

1. *Quelle est la probabilité de l'événement A : "on obtient au moins une fois pile"?*
2. *Quelle est la probabilité de l'événement B : "on obtient exactement une fois pile"?*
3. *Quelle est la probabilité de l'événement C : "on obtient au moins deux fois pile" (on suppose $n > 2$) ?*

Thomas Bayes (1702 - 1761)

Ce théologien protestant s'adonna aux mathématiques sous l'influence de Moivre (1667 - 1754).

Il sera le premier avec Laplace (1749 - 1827) à exposer le problème des probabilités conditionnelles.

“Son dessein était de définir une méthode nous permettant de tenir compte des événements dont nous avons connaissance pour évaluer la probabilité d’un événement inconnu”(Albert Jacquard)